УДК 517.928.2
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_5

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМИНИН ТУРУКТУУЛУГУНУН УЗАРТЫЛЫШЫ

Акматов Абдилазиз Алиевич, улук окутуучу
abdilaziz_akmatov@mail.ru
Замирбек кызы Наргиза, аспирант
nargiza.z_9292@bk.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Жумушта сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдеменин чечиминин изилдөө жараяны каралган. Чечимди изилдөөдө каралуучу аймакты мүмкүн болушунча жетишээрлик чоң кылып алуу максатка ылайыктуу болуп саналат. Баштапкы чекит туруктуу аралыктан тандалып алынган. Кичине козголуууга ээ болгон мүчө теңдемеде кездешпейт. Туруктуулуктун узартылышынын чектелиши комплекстүү аймакка көчкөндөн кийинки деңгээл сызыктардын жайгашуу абалдарынан көз каранды болот. Мына ошол себептүү сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме каралып, чечим чыныгы сандар талаасында изилденген. Изилдөө конкреттүү тандалып алынган функцияга негизделип жүргүзүлүп, теорема далилденген. Чечим изилденүүчү аралык туруктуулук шарты алмашкан учурду камтыйт.*

Түйүндүү сөздөр: *козголуу, дифференциалдык теңдеме, туруктуулук, Коши маселеси, кичине параметр, чечим.*

ЗАТЯГИВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Акматов Аблизазиз Алиевич, старший преподаватель
abdilaziz_akmatov@mail.ru
Замирбек кызы Наргиза, аспирант
nargiza.z_9292@bk.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В работе рассмотрено исследование решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. В ходе исследования приоритетом является выбор максимально большого интервала. Начальная точка выбрана в устойчивом интервале. В уравнении не встречается член, имеющий малое возмущение. При переходе к комплексной области появляется линия уровня. От расположения линии уровня зависит расширение учтойчивости решений. Поэтому рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение и исследование проводится в пространстве действительных чисел. Исследования основано на конкретно выбранной функции и доказана теорема. Рассматриваемый интервал захватывает точки смены устойчивости.*

Ключевые слова: *возмущение, дифференциальные уравнения, устойчивость, задача Коши, малый параметр, решение.*

DELAYING THE LOSS OF STABILITY SOLUTION OF SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Akmatov Abdilaziz Alievich, senior lecturer
abdilaziz_akmatov@mail.ru
Zamirbek kyzy Nargiza, aspirant

nargiza.z_9292@bk.ru
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The paper considers the study of the solution of singularly perturbed differential equations. In the course of the study, the priority is to choose the largest possible interval. The starting point is chosen in a stable interval. The equation does not contain a term that has a small perturbation. When moving to the complex area, a level line appears. The expansion of the responsiveness of solutions depends on the location of the level line. Therefore, a nonlinear differential equation is considered and the study is carried out in the space of real numbers. The research is based on a specifically chosen function and the theorem is proved. The considered interval captures the points of change of stability.*
Keywords: *perturbation, differential equations, stability, Cauchy problem, small parameter, solution.*

Киришүү. Комплекстүү тегиздиктеги деңгээл сызыктарынын жайгашуу абалдары кээ бир учурларда чечимдин туруктуулугунун узартылышын чектеп коет [1]. Мына ошол себептүү кичине козголуу деп аталуучу $\varepsilon h(t)$ мүчө катышпаган сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме каралат. Кичине козголуу чечимдин туруктуулугуна тийгизген таасири кичине же болбогон учурлар [2-5] каралган.

Маселенин коюлушу. Жумушта төмөнкү

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = a(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon f(t, x(t,\varepsilon)), \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon),\ \left|x^0(\varepsilon)\right| = O(\varepsilon), \tag{2}$$

маселе каралат. Мында $0 < \varepsilon << 1$ - кичине параметр, $[t_0, -t_0]$ - чыныгы октогу кесинди, $x(t,\varepsilon)$ - белгисиз функция.

Аралыкты $H_0 = \{(t,x) | t \in [t_0,-t_0], t_0 < 0,\ |x| \le \delta\}$, мында $0 < \delta$ - кандайдыр бир ε - көз каранды эмес турактуу сан.

Төмөнкү шарттар аткарылсын:

U 1. $f(t,0) \equiv 0$, $\forall (t,x) \in H_0$: $f(t,x) \in \Phi(S_r)$, $\Phi(S_r)$ - аналитикалык функциялардын мейкиндиги, $f(t,0) \equiv 0$; $\left| f(t,\tilde{x}) - f(t,\tilde{\tilde{x}}) \right| \le M \left|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\right| \times \max\{|\tilde{x}|, |\tilde{\tilde{x}}|\}$, мында $0 < M$ - кандайдыр бир ε - көз каранды эмес турактуу сан.

U2. $a(t) \in \Phi(S_r)$ жана $a(t) = tht + icth t$. Анда

$a(t) < 0$, $t < 0$ болсо,

$a(t) > 0$, $t > 0$ болсо,

$a(t) = 0$, $t = 0$ болсо.

Маселе. U 1-U 2 шартта (1) - (2) маселенин чечимин H_0 аралыктагы асимптотикалык жүрүмүн изилдөө.

(1)-(2) маселенин чечимин $C^1[t_0,-t_0]$ мейкиндигинде карайбыз.

Формалдуу түрдө $\varepsilon = 0$:

$$a(t)\xi(t) = 0. \tag{3}$$

(3) теңдеме

$$\xi(t) = 0, \tag{4}$$

чечимине ээ.

(1)-(2) маселесин интегралдык теңдеме менен алмаштырабыз:

$$x(t,\varepsilon)=x^0\left(\varepsilon\right)E(t,t_0,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)\,f(\tau,x(\tau,\varepsilon))d\tau\,, \tag{5}$$

мында $E(t,t_0,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)$, $E(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}a(s)ds\right)$.

(5) теңдемеге удаалаш жакындашуу усулун колдонобуз.

Удаалаш жакындашууларды төмөнкүчө аныктайлы:

$$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0\,,$$

$$x_m(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)E(t,t_0,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}E(t,\tau,\varepsilon)\,f(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon))d\tau\,, \tag{6}$$

мында $m=1,2,...$.

Теорема орун алат:

Теорема. U1 шарты аткарылсын жана $a(t)=tht+icth t$ болсун. Анда $\forall t\in[t_0,-t_0]$ аралыгында (1)-(2) маселе жалгыз чечимге ээ болуп жана

$$|x(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon\,, \tag{7}$$

баалоосу орун алат. Мында $C-const$.

Далилдөө. (6) удаалаш жакындашууларын баалайбыз:

$$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0\,,$$

$$x_1(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}(ths+icths)ds\right),\ |x_1(t,\varepsilon)|\le|x^0(\varepsilon)|\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}=C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}},$$

$m=2$ үчүн

$$x_2(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}(ths+icths)ds\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}(ths+icths)ds\right)f(\tau,x_1(\tau,\varepsilon))d\tau\,,$$

$$|x_2(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}+M\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}|x_1(\tau,\varepsilon)|\,d\tau\,,$$

же

$$|x_2(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}[1+M(t-t_0)].$$

$\forall m$ үчүн

$$x_m(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}(ths+icths)ds\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}(ths+icths)ds\right)f(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon))d\tau\,,$$

$$|x_m(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}+M\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}|x_{m-1}(\tau,\varepsilon)|\,d\tau\,,$$

жана

$$|x_m(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left[1+M(t-t_0)+...+\frac{M^{m-1}(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}\right] \tag{8}$$

Баалоону $m+1$ туура экендигин далилдейли. Анда (6) барабардыгынан

$$x_{m+1}(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}(ths+icths)ds\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}(ths+icths)ds\right)f(\tau,x_m(\tau,\varepsilon))d\tau,$$

$$|x_{m+1}(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}+M\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}|x_m(\tau,\varepsilon)|d\tau,$$

жана

$$|x_{m+1}(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left[1+M(t-t_0)+\frac{M^2(t-t_0)^2}{2!}+...+\frac{M^m(t-t_0)^m}{m!}\right]=C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}e^{M(t-t_0)}$$

(8) баалоосу далилденди.

$\{x_m(t,\varepsilon)\}$ удаалаштыгынын жыйналуучулугун далилдейли. Төмөнкү көрүнүштө жазып алалы:

$$x_m(t,\varepsilon)=x_1(t,\varepsilon)+(x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon))+(x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon))+...+(x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)).$$

$$(6)\Rightarrow\ x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}[f(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon))-f(\tau,x_{m-2}(\tau,\varepsilon))]d\tau.$$

$|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)|$ баалайлы. Анда

$$|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)|=\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot|f(\tau,x_1(\tau,\varepsilon)|d\tau\le M\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot$$

$$\cdot\max\{x_1(\tau,\varepsilon),x_0(\tau,\varepsilon)\}d\tau.$$

$$\max\{|x_1(t,\varepsilon)|,|x_0(t,\varepsilon)|\}=|x_1(t,\varepsilon)|\Rightarrow$$

$$|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)|=\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot|f(\tau,x_1(\tau,\varepsilon)|d\tau\le M\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot$$

$$\max\{|x_1(\tau,\varepsilon)|,|x_0(\tau,\varepsilon)|\}d\tau=CM\varepsilon\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}(t-t_0).$$

$|x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)|$ баалайлы. Анда

$$|x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)|=\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot|f(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon))-f(\tau,x_{m-2}(\tau,\varepsilon))|d\tau\le M\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot$$

$$\cdot\max\{|x_{m-1}(\tau,\varepsilon)|,|x_{m-2}(\tau,\varepsilon)|\}d\tau\le M\int_{t_0}^{t}\left(\frac{cht}{ch\tau}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot|x_{m-1}(\tau,\varepsilon)|d\tau=C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot$$

$$\cdot\left[M(t-t_0)+\frac{M^2(t-t_0)^2}{2!}+...+\frac{M^{m-1}(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}\right].$$

Демек,

$$|x_1(t,\varepsilon)+(x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon))+(x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon))...+(x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon))+...|\le$$

$$\le|x_1(t,\varepsilon)|+|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)|+|x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)|+...+|x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon|+...\le$$

$$\leq C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(1+M(t-t_0)+M^2\frac{(t-t_0)^2}{2!}+...+M^m\frac{(t-t_0)^m}{m!}+...\right)$$

$$=C\varepsilon\left(\frac{cht}{cht_0}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}e^{M(t-t_0)}. \qquad (9)$$

(9) оң жагы $\forall t\in[t_0;-t_0]$ аралыгында бир калыпта жыйналат. Анда $\forall t\in[t_0;-t_0]$ аралыгында $\{x_m(t,\varepsilon)\}$ удаалаштыгы да бир калыпта (5) маселесинин чечими болгон $x(t,\varepsilon)$ жыйналат.

$$(9)\Rightarrow\ |x(t,\varepsilon)|\leq C\varepsilon.$$

Чечимдин жалгыздыгы [1] аналогиялуу далилденет. Демек, (1) маселесинин чечими $t\in[t_0,-t_0]$ аралыгында жашап, жалгыз болуп, ал үчүн (7) баалоосу орун алат. Теорема далилденди.

Корутунду. Туруктуулуктун узартылышына $\varepsilon h(t)$ кичине козголуусу таасирин тийгизет. Бул учурда бул козголуу каралган эмес. Мына ошол себептүү чечимдин туруктуулугун жетишээрлик чоң аралыкка узартуу мүмкүнчүлүгү пайда болду. Баштапкы чекит туруктуу аралыктан чечимдин туруктуулугунун узартылышы жетишээрлик чоң боло тургандай болуп тандалды.

Адабияттар

1. Алыбаев, К.С. Метод линия уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. [Текст] / К.С. Алыбаев // Дисс. … д-ра физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2001. – 204 с.
2. Акматов А.А. Об устойчивости решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. [Текст] / А.А. Акматов // Журнал бюллетень науки и практики. Москва. №3. – 2023. – С. 39-46.
3. Акматов А.А. Сингулярдык козголгон маселенин чечимин изилдөө. [Текст] / А.А. Акматов // Вестник ОшГУ. Ош. №2. – 2021. – С. 26-33.
4. Каримов С. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, когда собственные значения матрицы имеют мнимые части. [Текст] / А.А. Акматов // Вестник ОшГУ. – Ош. 2021. №1. – С. 61-69.
5. Турсунов, Д.А. Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных задач в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют n-кратный полюс. [Текст] / Д.А. Турсунов // Дисс. ... канд. физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек,2005. – 106 с.