УДК 517.928
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_4

КИЧИНЕ КОЗГОЛУУНУН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМИНИН ТУРУКТУУЛУГУНУН УЗАРТЫЛЫШЫНА ТИЙГИЗГЕН ТААСИРИ

Акматов Абдилазиз Алиевич, улук окутуучу
abdilaziz_akmatov@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Жумушта сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдеменин чечиминин изилдөө жараяны каралган. Кичине козголуунун чечимдин узартылышына тийгизген таасири конкреттүү мисалдын жардамында ачылып көрсөтүлгөн. Эгерде кичине козголуу теңдеш нөлгө барабар болсо, анда чыныгы сандар талаасында чечимдин туруктуулугунун узартылышын жетишээрлик чоң боло тургандай кылып баштапкы чекитти тандап алууга болот. Баштапкы чекит туруктуу аралыктан тандалып алынды. Ал эми кичине козголуу нөлдөн айырмалуу болсо, анда комплекстүү аймакка өтүү зарылдыгы келип чыгат. Бул учурда комплекстүү аймактагы деңгээл сызыктардын жайгашуусу чыныгы окту кармабай калат. Тактап айтканда маселенин чечими изилденүүчү аймак жашабайт. Чечимди бул учурда баштапкы чекиттен тарта нөлгө дейре узартуу мүмкүнчүлүгү эле болот.*

Түйүндүү сөздөр: *кичине козголуу, дифференциалдык теңдеме, туруктуулук, Коши маселеси, кичине параметр, чечим, асимптотика.*

ВЛИЯНИЕ МАЛОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ЗАТЯГИВАНИЮ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Акматов Аблизазиз Алиевич, старший преподаватель
abdilaziz_akmatov@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В работе рассмотрено исследование решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. С помощью конкретного примера показано влияние малого возмущения затягиванию потери устойчивости решений. Если малое возмущение тождественно равно к нулю, тогда в пространстве действитльных чисел можно выбрать начальную точку так, что затягивание потери устойчивости было досточно велико. Начальная точка выбрано в устойчивом интервале. Если малое возмущение отлично от нуля, то появится необходимость перехода к комплексной области. В этом случае расположение линии уровня в комплексной плоскости не захватывает действительную ось. Точнее не существует область, в которой исследуется решение задачи. Тогда остается возможность затягивания потери устойчивости от начальной точки до точки ноль.*

Ключевые слова: *малое возмущение, дифференциальные уравнения, устойчивость, задача Коши, малый параметр, решение, асимптотика.*

INFLUENCE OF A SMALL PERTURBATION ON LOSS PULLING STABILITY OF SOLUTIONS TO SINGULARLY PERTURBATE EQUATIONS

Akmatov Abdilaziz Alievich, senior lecturer
abdilaziz_akmatov@mail.ru
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The paper considers the study of the solution of singularly perturbed differential equations. With the help of a specific example, the influence of a small perturbation on the delay in the loss of stability of solutions is shown. If a small perturbation is identically equal to zero, then in the space of real numbers one can choose the starting point so that the delay in the loss of stability is sufficiently large. The starting point is chosen in a stable interval. If a small perturbation is different from zero, then it will be necessary to pass to the complex region. In this case, the location of the level line in the complex plane does not capture the real axis. More precisely, there is no area in which the solution of the problem is investigated. Then there remains the possibility of delaying the loss of stability from the initial point to the zero point.*
Keywords: *small perturbation, differential equations, stability, Cauchy problem, small parameter, solution, asymptotic.*

Киришүү. Кичине козголуу $\varepsilon h(t)$-нын чечимдин туруктуулугунун узартылышына болгон таасири мисалдын негизинде каралат. Комплекстүү тегиздиктеги деңгээл сызыктарынын жайгашуу абалдары кээ бир учурларда чечимдин туруктуулугунун узартылышын чектеп коет [1]. Чечимдин туруктуулугун узартылышы $a(t)$ функциясынан жана баштапкы чекитти тандап алуудан да көз каранды болору [2-4] жумуштарда көрсөтүлгөн.

Маселенин коюлушу. Төмөнкү

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = a(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon\left[h(t) + f(t, x(t,\varepsilon))\right], \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\,,\ \left|x^0(\varepsilon)\right| = O(\varepsilon), \tag{2}$$

мында $0 < \varepsilon << 1$ - кичине параметр, $[t_0, T]$ - чыныгы октогу кесинди, $x(t,\varepsilon)$ - белгисиз функция.

Аралык $H_0 = \{(t,x) | t \in [t_0, T], |x| \le \delta\}$, мында $0 < \delta$ - кандайдыр бир ε - көз каранды эмес турактуу сан.

Төмөнкү шарттар аткарылсын:

U 1. $f(t,0) \equiv 0$, $\forall (t,x) \in H_0$: $f(t,x) \in \Phi(S_r)$, $\Phi(S_r)$ - аналитикалык функциялардын мейкиндиги, $f(t,0) \equiv 0$; $\left| f(t,\tilde{x}) - f(t,\tilde{\tilde{x}}) \right| \le M \left|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\right| \times \max\left\{|\tilde{x}|, \left|\tilde{\tilde{x}}\right|\right\}$, мында $0 < M$ - кандайдыр бир ε - көз каранды эмес турактуу сан. Ажыралма экинчи даражадан кем эмес болуп башталат.

U 2. $a(t)$, $h(t) \in \Phi(S_r)$ жана $a(t) = 2t$. Анда

$a(t) < 0$, $t < 0$ болсо,

$a(t) > 0$, $t > 0$ болсо,

$a(t) = 0$, $t = 0$ болсо.

Маселе. U 1-U 2 шартта (1)-(2) маселенин чечимин H_0 аралыгындагы асимптотикалык жүрүмүн изилдөө.

(1)-(2) маселенин чечимин $C^1[t_0, T]$ мейкиндигинде карайбыз.

Формалдуу түрдө $\varepsilon = 0$:

$$a(t)\xi(t) = 0\,. \tag{3}$$

(3) теңдеме

$$\xi(t) = 0\,, \tag{4}$$

чечимине ээ.

(1)-(2) маселесин интегралдык теңдеме менен алмаштырабыз:

$$x(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)E(t,t_0,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)\left[h(\tau) + f(\tau, x(\tau,\varepsilon))\right]d\tau\,, \tag{5}$$

мында $E(t,t_0,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$, $E(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t} a(s)ds\right)$.

(5) теңдемеге удаалаш жакындашуу усулун колдонобуз.

Удаалаш жакындашууларды төмөнкүчө аныктайлы:

$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0$,

$$x_m(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)E(t,t_0,\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)[h(\tau)+f(\tau,x_{m-1}(\tau,\varepsilon))]d\tau\,, \tag{6}$$

мында $m=1,2,\dots$.

Аныктама 1. $\forall t\in H_0\subset C$ $\left(\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon)=0\right)$ $\Rightarrow$ H_0 аралыгында $x(t,\varepsilon)$ чечимди козголбогон теңдеменин $\xi(t)\equiv 0$ чечимине карата туруктуу деп атайбыз.

Аныктама 2. $\varepsilon h(t)$ - кичине козголуу деп атайбыз.

1). $h(t)\equiv 0$ болсун.

Теорема орун алат:

Теорема 1. U 1 шарты аткарылсын жана $a(t)=2t$, $h(t)\equiv 0$ болсун. Анда $\forall t\in[t_0,T]$ аралыгында (1)-(2) маселе жалгыз чечимге ээ болуп жана

$$|x(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon\,, \tag{7}$$

баалоосу орун алат. Мында $C-const$.

Далилдөө. (6) удаалаш жакындашууларын баалайбыз:

$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0$,

$$x_1(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right),\ |x_1(t,\varepsilon)|\le|x^0(\varepsilon)|\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)=C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right),$$

$m=2$ үчүн

$$x_2(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)+\int\limits_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)f(\tau,x_1(\tau,\varepsilon))d\tau\,,$$

$$|x_2(t,\varepsilon)|\le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)+M\int\limits_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)|x_1^2(\tau,\varepsilon)|d\tau\,,$$

мындан

$$|x_2(t,\varepsilon)|\le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\left[1+M\alpha_1^2(\varepsilon)(C_1\varepsilon)\int\limits_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{\tau^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)d\tau\right].$$

же

$$|x_2(t,\varepsilon)|\le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\cdot\left[1+M\alpha_1^2(\varepsilon)(C_1\varepsilon)^2\right]=C_1\varepsilon\alpha_2(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right),$$

бул жерде $\alpha_2(\varepsilon)=(1+M\alpha_1^2\varepsilon)(C_1\varepsilon)^2)$, $\alpha_1(\varepsilon)=1$, $(C_1\varepsilon)^2<1$, $\alpha_2(\varepsilon)>1$.

$m=3$ үчүн

$$x_3(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)+\int\limits_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)f(\tau,x_2(\tau,\varepsilon))d\tau\,,$$

$$|x_3(t,\varepsilon)|\le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)+M\int\limits_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)\cdot|x_2^2(\tau,\varepsilon)|d\tau\,,$$

мындан

$$|x_3(t,\varepsilon)| \le C_1\varepsilon \exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right) + M\alpha_2^2(\varepsilon)(C_1\varepsilon)^2 \exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\int_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{\tau^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)d\tau .$$

Жыйынтыгында

$$|x_3(t,\varepsilon)| \le C_1\varepsilon\alpha_3(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right),$$

бул жерде $\alpha_3(\varepsilon) = 1 + M\alpha_2^2(\varepsilon)(C_1\varepsilon)^2$.

$m = k$ үчүн

$$x_m(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right) + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right) f(\tau, x_{m-1}(\tau,\varepsilon))d\tau ,$$

$$|x_m(t,\varepsilon)| \le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right) + M\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)\left|x_{m-1}^2(\tau,\varepsilon)\right|d\tau ,$$

мындан

$$|x_m(t,\varepsilon)| \le C_1\varepsilon\alpha_m(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right), \qquad (8)$$

мында $\alpha_m(\varepsilon) = 1 + M\alpha_{m-1}^2(\varepsilon)(C_1\varepsilon)$.

Баалоону $m+1$ туура экендигин далилдейли. Анда (6) барабардыгынан

$$x_{m+1}(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right) + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right) f(\tau, x_m(\tau,\varepsilon))d\tau ,$$

$$|x_{m+1}(t,\varepsilon)| \le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right) + M\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)\left|x_m^2(\tau,\varepsilon)\right|d\tau ,$$

мындан

$$|x_{m+1}(t,\varepsilon)| \le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\left[1 + M\alpha_m^2(\varepsilon)(C_1\varepsilon)^2\right] = C_1\varepsilon\alpha_{m+1}(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right),$$

мында

$$\alpha_{m+1}(\varepsilon) = 1 + M(C_1\varepsilon)^2\alpha_m^2(\varepsilon). \qquad (9)$$

(8) баалоосу далилденди.

(9) барабардыктан $\varepsilon^2 \le \dfrac{1}{4MC_1^2}$ барбарсыздыгынан $\forall m \in N, m \ge 3, \alpha_{m+1}(\varepsilon) \le 2C_1 = C$.

Демек, (7) баалоо орун алат.

$\{x_m(t,\varepsilon)\}$ удаалаштыгынын жыйналуучулугун далилдейли:

$$x_m(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + (x_2(t,\varepsilon) - x_1(t,\varepsilon)) + (x_3(t,\varepsilon) - x_2(t,\varepsilon)) + \ldots + (x_m(t,\varepsilon) - x_{m-1}(t,\varepsilon)) + \ldots .$$

Анда $(6) \Rightarrow$ $x_m(t,\varepsilon) - x_{m-1}(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)\left[f(\tau, x_{m-1}(\tau,\varepsilon)) - f(\tau, x_{m-2}(\tau,\varepsilon))\right]d\tau$.

$$|x_m(t,\varepsilon) - x_{m-1}(t,\varepsilon)| = \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)\cdot\left|f(\tau, x_m(\tau,\varepsilon)) - f(\tau, x_{m-1}(\tau,\varepsilon))\right|\cdot\left|x_m(\tau,\varepsilon) - x_{m-1}(\tau,\varepsilon)\right|d\tau \le$$

$$\le M\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)\cdot\max\{|x_{m-1}(\tau,\varepsilon)|,|x_{m-2}(\tau,\varepsilon)|\}\cdot|x_{m-1}(\tau,\varepsilon) - x_{m-2}(\tau,\varepsilon)|d\tau,$$

бул жерде (8) эске алуу менен

$$\max\{|x_{m-1}(t,\varepsilon)|,|x_{m-2}(t,\varepsilon)|\} = C_1\varepsilon\alpha_m(\varepsilon)\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right).$$

$|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)|$ баалайлы. Анда

$$|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)| = \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)\cdot C_1\varepsilon\alpha_m(\varepsilon)\exp\left(\frac{\tau^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)|x_1(\tau,\varepsilon)|d\tau$$

$$|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)| \le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\beta(\varepsilon),\ \beta(\varepsilon)=M(C_1\varepsilon)^2\alpha_m(\varepsilon).$$

$|x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)|$ баалайлы. Анда

$$|x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)| \le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\beta^2(\varepsilon),\ \beta^2(\varepsilon)=\left(M(C_1\varepsilon)^2\alpha_m(\varepsilon)\right)^2.$$

$|x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)|$ баалайлы. Анда

$$|x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon)| \le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\cdot\beta^m(\varepsilon),\ \beta_m(\varepsilon)=\left(M(C_1\varepsilon)^2\alpha_m(\varepsilon)\right)^m.$$

Демек,

$$|x_1(t,\varepsilon)+(x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon))+(x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon))...+(x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon))+...| \le$$

$$\le |x_1(t,\varepsilon)|+|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)|+|x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)|+...+|x_m(t,\varepsilon)-x_{m-1}(t,\varepsilon|+... \le$$

$$\le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)1+\beta(\varepsilon)+...+\beta^m(\varepsilon)+...) \le C_1\varepsilon\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)\cdot\frac{1}{1-\beta(\varepsilon)} \tag{10}$$

(10) оң жагы $\forall t\in[t_0;T]$ аралыгында бир калыпта жыйналат. Анда $\forall t\in[t_0;T]$ аралыгында $\{x_m(t,\varepsilon)\}$ удаалаштыгы да бир калыпта (5) маселесинин чечими болгон $x(t,\varepsilon)$ жыйналат.

$(10)\Rightarrow\ |x(t,\varepsilon)|\le C\varepsilon$.

Демек, (1) маселесинин чечими $t\in[t_0,T]$ аралыгында жашап, жалгыз болуп, ал үчүн (7) баалоосу орун алат. Теорема далилденди.

(7) баалоо (3) маселенин чечими болгон (4) пределдик өтүү орун аларын көрсөтөт.

2). $h(t)\ne 0$ болсун. Биринчи удаалаш жакындашууда

$$|x_1(t,\varepsilon)| \le |x^0(\varepsilon)|\exp\left(\frac{t^2-t_0^2}{\varepsilon}\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{t^2-\tau^2}{\varepsilon}\right)|h(\tau)|d\tau.$$

$t\in[t_0,T]$ аралыгында $t^2-\tau^2=0$, $t^2-\tau^2<0$, $t^2-\tau^2>0$. Мына ошол себептүү комплекстүү тегиздикке көчөбүз:

$$t=t_1+it_2,\ \tau=\tau_1+i\tau_2,\ t_1,t_2,\tau_1,\tau_2\in R,\ u(t_1,t_2,t_0)=\mathrm{Re}\int_{t_0}^{t}sds=\left(t_1^2-t_2^2\right)-\left(t_{01}^2-t_{02}^2\right).$$

Баштапкы чекит $t_0=t_{01}<0$, $(t_{02}=0)$. Комплекстүү тегиздиктеги аймак, чыныгы окту кармабайт. Мында $\varepsilon h(t)$ кичине козголуусунун тийгизген таасири байкалат.

Бул жерде $H_4=\{(t_1,t_2):u(t_1,t_2)\le 0\}$, $H_2=\{(t_1,t_2):u(t_1,t_2)\le 0\}$ - регулярдуу аймактар, ал эми $H_1=\{(t_1,t_2):u(t_1,t_2)>0\}$, $H_3=\{(t_1,t_2):u(t_1,t_2)>0\}$ - сингулярдуу аймактар, $t_2=\pm t_1$ чек аралык ийрилер.

Комплекстүү тегиздикте H_0 аралыгына дал келүүчү комплекстүү аймак жашабайт, ошол себептүү изилдөөнү уланта албайбыз. Ал $\varepsilon h(t)$ кичине козголуусунун таасири жана комплекстүү тегиздиктеги деңгээл сызыктарынын жайгашуу абалдарына жараша болот.

Эгерде кичине козголуу нөлдөн айырмалуу болсо, чечимди туруктуу аралыкта гана изилдөөгө болот. Б.а. $t \in [t_0, 0)$ аралыгында гана орун аларын көрсөтүүгө болот.

Корутунду. Кичине козголуу деп аталуучу $\varepsilon h(t)$ мүчө нөлгө теңдеш барабар болгон учурда чечимдин туруктуулугун узартуу мүмкүнчүлүгү мисалдын негизинде каралды. Удаалаш жакындашуу усулунун жардамында чечимдин асимптотикасы изилденди. Туруктуулуктун узартылышында мүмкүн болушунча чоң кармалуу убактысы боло тургандай туруктуу аралыктан баштапкы чекит тандалып алынды. Ал эми кичине козголуу нөлдөн айырмалуу болсо, бул мисалда чечимди изилдөө үчүн комплекстүү аймакка өтүп алдык. Бирок $0t_1$ огун кармаган аймак жашабагандыгы үчүн маселени изилдөө мүмкүнчүлүгү болбоду. Комплекстүү тегиздиктеги деңгээл сызыктарынын жайгашуу абалдары кээ бир учурларда чечимдин туруктуулугунун узартылышын чектеп коет [1]. Ал бул жумушта даана көрсөтүлдү.

Адабияттар

1. Алыбаев, К.С. Метод линия уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. [Текст] / К.С. Алыбаев // Дисс. … д-ра физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2001. – 204 с.
2. Акматов А.А. Об устойчивости решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. [Текст] / А. А. Акматов // Журнал бюллетень науки и практики. Москва. №3. – 2023. – С. 39-46.
3. Акматов А.А. Сингулярдык козголгон маселенин чечимин изилдөө. [Текст] / А. А. Акматов // Вестник ОшГУ. Ош. №2. – 2021. – С. 26-33.
4. Каримов С. Исследование решений системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, когда собственные значения матрицы имеют мнимые части.[Текст] / А. А. Акматов // Вестник ОшГУ. – Ош. 2021. №1. – С. 61-69.