УДК 517.97
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_3

О СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ВЕКТОРНЫХ УПРАВЛЕНИЯХ

Абдылдаева Эльмира Файзулдаевна, к.ф.-м.н., доцент
efa_69@mail.ru
Кыргызско-Турецкий университет Манас
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *В статье исследован вопрос сходимости приближений обобщённого решения краевой задачи при векторных управлений. Установлено, что наличие интегрального оператора Фредгольма обуславливает появления приближений по резольвенте, который используется при доказательстве сходимости конечномерных приближений к точному решению.*

Ключевые слова*. краевая задача, обобщённое решение, интегральное тождество сходимость приближений.*

ВЕКТОРДУК БАШКАРУУ АЛДЫНДАГЫ ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН ЖАЛПЫЛАНГАН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН ЖАКЫНДАШТЫРЫЛЫШЫНЫН ЖЫЙНАЛУУЧУЛУГУ

Абдылдаева Эльмира Файзулдаевна, ф.-м.и.к., доцент
efa_69@mail.ru
Кыргыз-Түрк Манас университети.
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация*. Макалада вектордук башкаруу астындагы чектик маселенин жалпыланган чыгарылышынын жакындаштырылышы изилденген. Тендемеде Фредгольмдун интегралдык операторунун болушу, чектүү өлчөмдөгү жакындаштырылыштын так чыгарылышка жыйналуучулугун далилдөө үчүн колдонула турган, резольвент боюнча жакындаштырылыган чыгарылыш түшүнүгүн пайда кылаары тастыкталды.*

Ачкыч сөздөр*. Чектик маселе, жалпыланган чыгарылыш, интегралдык тендештик, жыйналуучулук, жакындаштырылыш.*

ON CONVERGENCE OF APPROXIMATIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEM`S GENERALIZED SOLUTION WITH VECTOR CONTROLS

Abdyldaeva Elmira Faizuldaevna, Candidate of Ph. and Math. Sc., associate professor
efa_69@mail.ru
Kyrgyz-Turkish Manas University
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *In the article, the convergence of approximations of generalized solution of the boundary value problem with vector controls has been studied. It is established that presence of Fredholm integral operator in the equation causes the appearance of resolvent approximations, which it is used in proving the convergence of the finite-dimensional approximations to the exact solution.*

Keywords*. Boundary value problem, generalized solution, Integral identity, convergence approximations.*

1. Введение (Киришүү, Introduction). Задачи оптимального управления системами с распределёнными параметрами появляются при исследовании процессов, описываемых уравнениями в частных производных, интегро-дифференциальными уравнениями с интегральным оператором Фредгольма или Вольтерра. При этом учёт процессов, происходящих на границе и в начале процесса, приводит к краевой задаче. В теории управления исследование краевых задач проводится при наличии параметров под действием которых можно активно влиять на изменения состояния управляемого процесса. В данной статье исследованы вопросы построения обобщённого решения краевой задачи и его приближений, а также сходимости приближений при наличии векторных управлений.

Рассмотрим управляемый колебательный процесс, описываемый функцией $V\left(t,x\right)$, которая в области Q_T удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$V_{tt}-AV=\lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau+f[t,x,\bar{u}(t,x)],\quad x\in Q\subset R^n, 0<t\le T, \tag{1}$$

а на границе области Q_T начальным

$$V(0,x)=\psi_1(x),\qquad V_t(0,x)=\psi_2(x),\quad x\in \mathrm{Q}, \tag{2}$$

и граничному

$$\Gamma V(t,x)\equiv\sum_{i,j=1,n}^{n}a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x)\cos(\delta,x_i)+a(x)V(t,x)=p[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)], x\in\gamma, 0<t\le T. \tag{3}$$

условиям. Здесь A–эллиптический оператор, действующий по формуле

$$AV(t,x)=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x))_{x_i}-c(x)V(t,x),\quad a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\quad \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j\ge c_0\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2, c_0>0,$$

а $a(x)\ge 0, c(x)\ge 0-$ известные измеримые функции; Q-область n-мерного евклидового пространства R^n ограниченная кусочно-гладкой границей γ, а $Q_T=Q\times\left(0,T\right]$, T-фиксированный момент времени; $K\left(t,\tau\right)$–заданная функция, она определена в области $D=\{0\le t\le T,\quad 0\le\tau\le T\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2\left(t,\tau\right)d\tau dt=K_0<\infty, \tag{4}$$

т.е. является элементом гильбертово пространства квадратично суммируемых функций в $H(\mathrm{D})$; λ -параметр; $\psi_1(x)\in H_1(Q),\psi_2(x)\in H(Q),$ – заданные функции, определяющие начального состояния колебательного процесса, где $H_1(Q)$ – Соболева пространство первого порядка; $H(Q)$-гильбертово пространство квадратично – суммируемых в области Q функций; δ -вектор нормали исходящий из точки $x\in\gamma$; $f[t,x,\bar{u}(t,x)]$, $p[t,x,\bar{\vartheta}(t,x)]$ – заданные монотонные функциии внешнего и граничного источников. которые нелинейно зависят соответственно от вектор - функций управления $\bar{u}(t,x)=\left(u_1(t,x),...,u_m(t,x)\right)\in H^m(Q_T)$, $\bar{\vartheta}(t,x)=\left(\vartheta_1(t,x),...,\vartheta_m(t,x)\right)\in H^k(\gamma_T)$ и являются элементами пространства $H^m(Q_T)=H(Q_T)\times...\times H(Q_T)$, и $H^k(Q_T)=H(\gamma_T)\times...\times H(\gamma_T)$ соответственно.

При заданных исходных данных краевая задача (1)-(3) не имеет классического решения. В этой связи в приложениях пользуются понятием обобщённого решения, которое более адекватно описывает реально происходящий процесс.

Определение. *О*бобщённым решением краевой задачи *(1)-(3)* называется функция $V(t,x)\in H(Q_T)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{gathered}\int\limits_Q \left(V_t(t,x)\cdot\Phi(t,x)-V(t,x)\cdot\Phi_t(t,x)\right)\Big|_{t_1}^{t_2}dx=-\int\limits_Q\int\limits_{t_1}^{t_2}V(t,x)\cdot\Phi_{tt}(t,x)dtdx-\\ -\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\int\limits_Q\left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x_j}\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x_i}+c(x)V(t,x)\Phi(t,x)\right)dx-\right.\\ \left.-\int\limits_\gamma\left(p[t,x,\overline{\vartheta}(t,x)]-a(x)V(t,x)\right)\Phi(t,x)dx\right)dt+\\ +\int\limits_{t_1}^{t_1}\int\limits_Q\left(\lambda\int\limits_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau+f[t,x,\overline{u}(t,x)\right)\Phi(t,x)dxdt,\end{gathered}\tag{5}$$

при любых t_1, t_2, $\left(0<t_1\le t\le t_2\le T\right)$ и $\Phi(t,x)\in H_1(Q_T)$, а также начальным условиям в слабом смысле, т.е.

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_Q V(t,x)\phi_0(x)dx=\int\limits_Q\psi_1(x)\phi_0(x)dx,\ \lim_{t\to+0}\int\limits_Q V_t(t,x)\phi_1(x)dx=\int\limits_Q\psi_2(x)\phi_1(x)dx, \tag{6}$$

для любых функций $\phi_0(x)\in H(Q)$, $\phi_1(x)\in H(Q)$.

Решение краевой задачи (1)-(3) ищем в виде

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^\infty V_n(t)z_n(x), \tag{7}$$

где $V_n(t)=\langle V(t,x),z_n(x)\rangle=\int\limits_Q V(t,x)z_n(x)dx$ коэффициенты Фурье,

$z_n(x)$ являются обобщенными собственными функциями краевой задачи

$$D_n(V,z_r(x))=\int\limits_Q\left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)V_{x_j}z_{rx_i}+c(x)Vz_r(x)\right)dx+\int\limits_\gamma a(x)V)z_r(x)dx=\lambda_n^2\int\limits_Q V(t,x)z_r(x)dx,$$

$$\Gamma z_r(x)=0,\quad x\in\gamma,\quad 0<t<T,\quad r=1,2,..., \tag{8}$$

и образуют полную ортонормированную систему $\{z_r(x)\}$ в гильбертовом пространстве $H(Q)$, а соответствующие собственные значения λ_n удовлетворяет следующим условиям $\lambda_n\le\lambda_{n+1}$, $\forall n=1,2,3,\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$. Установлено, что коэффициенты Фурье определяются как решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода вида

$$V_n(t)=\lambda\int\limits_0^T K_n(t,s)V_n(s)ds+q_n(t),\quad n=1,2,3,\ldots, \tag{9}$$

где

$$q_n(t)=\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^t\sin\lambda_n(t-s)\left(f_n[s,\overline{u}]+p_n[s,\overline{\vartheta}]\right)ds. \tag{10}$$

$$K_n(t,s)=\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)K(\tau,s)d\tau. \quad (11)$$

Решение интегрального уравнения (9) определяется по формуле

$$V_n(t)=\lambda\int_0^T R_n(t,s\lambda)q_n(s)ds+q_n(t), \quad (12)$$

где
$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s), \quad (13)$$

резольвента ядра $K_n(t,s)\equiv K_{n,1}(t,s)$, а повторные ядра $K_{n,i}(t,s)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\ldots$, определяются по формулам

$$K_{n,i+1}(t,s)=\int_0^T K_n(t,\eta)K_{n,i}(\eta,s)d\eta, \quad i=1,2,3,\ldots,\ K_{n,1}(t,s)=K_n(t,s). \quad (14)$$

Исследуем сходимость ряда Неймана (13). Согласно оценкам ядер

$$|\mathrm{K}_{n,i}(t,s)|^2\le\frac{T^{2i-1}K_0^{i-1}}{(\lambda_n^2)^i}\int_0^T K^2(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau, \quad i=1,2,3,\ldots. , \quad (15)$$

Не трудно проверить, что ряд Неймана (13) сходится для всех значений параметра λ, удовлетворяющих неравенству $|\lambda|\frac{T}{\lambda_n}\sqrt{K_0}<1.$

Ряд Неймана, для значений параметра λ, удовлетворяющих условию $|\lambda|<\frac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}}\underset{n\to\infty}{\to}\infty$ абсолютно сходится при каждом $n=1,2,3,\ldots$ т.е. радиус сходимости ряда увеличивается с ростом n. Отметим, что ряд Неймана для любого $n=1,2,3,\ldots$ абсолютно сходится лишь при значении λ, удовлетворяющих неравенству

$$|\lambda|<\frac{\lambda_1}{T\sqrt{K_0}}. \quad (16)$$

При этом резольвента $R_n(t,s,\lambda)$, как сумма абсолютно сходящегося ряда, является непрерывной функцией и удовлетворяет оценкам

$$|R_n(t,s,\lambda)|\le\left(\int_0^T K^2(\tau,s)d\tau\right)^{1/2}\frac{\sqrt{T}}{\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0}}; \quad (17)$$

$$\int_0^T|R_n(t,s,\lambda)|^2ds\le\int_0^T\int_0^T K^2(\tau,s)d\tau ds\frac{T}{\left(\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0}\right)^2}=\frac{K_0T}{\left(\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0}\right)^2}, \quad (18)$$

которое в дальнейшем используется при доказательствпе сходимости приближений обобщенного решения.

Таким образом, формальное решение краевой задачи (1)-(3) определяется по формуле

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s\lambda)q_n(s)ds+q_n(t)\right)z_n(x) \quad (19)$$

Легко доказать, что эта функция и ее обобщенные производные первого порядка являются элементами пространства $H(Q_T)$.

То что найденная функция $V(t,x)$ удовлетворяет интегральному тождеству (5) следует из ее построения.

2. Приближение обобщённого решения краевой задачи и их сходимость

Поскольку обобщённое решение определяется в виде суммы бесконечного ряда, то не всегда удаётся найти его явный вид. На практике ограничивается конечномерными приближениями обобщённого решения, которые являются классическими решениями рассматриваемой задачи. При этом следует убедиться сходимость конечномерных приближений к точному решению, ибо в противном случае математические выкладки могут быть неверными. Поэтому проверка сходимости конечномерных приближений к точному решению на практике имеет важное значение.

Наличие интегрального оператора Фредгольма в краевой задаче существенно влияет на процесс сходимости конечномерных приближений. На самом деле в этом случае при доказательстве сходимости следует различать два вида приближений: Приближение по резольвенте и конечномерное приближение.

Приближение по резольвенте появляется естественным образом, т.к. резольвента определяется как сумма бесконечного ряда. Поэтому под приближением по резольвенте понимаем функцию вида

$$V^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)q_n(s)ds+q_n(t)\right)z_n(x), \tag{20}$$

где
$$R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\quad n=1,2,3,..., \tag{21}$$

m - *м* приближением резольвенты $R_n(t,s,\lambda)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\ldots$.

Лемма-1. Приближения по резольвенте решение $V^m(t,x)$ краевой задачи *(1)-(3)* сходится к точному решению $V(t,x)$ по норме пространства $H(Q_T)$, т.е. имеет место соотношение

$$\| V(t,x)-V^m(t,x)\|^2_{H(Q_T)} \underset{m\to\infty}{\to} 0.$$

Конечномерные приближения решения определяется по формуле

$$V_k^m(t,x)=\sum_{n=1}^{k}\left(\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)q_n(s)ds+q_n(t)\right)z_n(x),\quad k=1,2,.... \tag{22}$$

Сначала доказывается сходимость конечномерных приближений к приближению по резольвенте.

Лемма-2. Конечномерные приближения сходятся к приближениям по резольвенте по норме пространства $H(Q_T)$ при каждом фиксированном m, т.е. имеет место соотношение

$$\| V^m(t,x)-V_k^m(t,x)\|^2_{H(Q_T)} \underset{k\to\infty}{\to} 0,\quad m=1,2,....$$

Далее доказывается сходимость конечномерных приближений к точному решению краевой задачи.

Лемма-3. Конечномерные приближения сходится к точному решению краевой задачи по норме пространства $H\left(Q_T\right)$ при каждом фиксированном m, т.е. имеет место соотношение

$$\| V(t,x) - V_k^{\,m}(t,x) \|^2_{H(Q_T)} \underset{\substack{k\to\infty \\ m\to\infty}}{\longrightarrow} 0.$$

Доказательства Леммы 1 и Леммы 2 проводиться непосредственным вычислением, а утверждение Леммы-3 следует из соотношения

$$\| V(t,x) - V_k^{\,m}(t,x) \|^2_{H(Q_T)} \le \left\| V(t,x) - V^m(t,x) \right\|^2_{H(Q_T)} + \left\| V^m(t,x) - V_k^{\,m}(t,x) \right\|^2_{H(Q_T)} \underset{\substack{k\to\infty \\ m\to\infty}}{\longrightarrow} 0.$$

В результате исследования вопросов сходимости приближений обобщённого решения краевой задачи, обнаружено, что внешние и граничные векторные управления не влияют на сходимости приближений.

Литература

1. Kerimbekov A.K. On solvability of the nonlinear optimal control problem for processes described by the semi-linear parabolic equations. // Proceedings World Congress on Engineering 2011, London, UK, 6-8 July 2011, vol. 1, -P. 270–275.
2. V. Volterra, Theory of functionals and of integral and integro-differential equations, New York, USA, 2005.
3. Richtmyer R.D. Principles of Advanced Mathematical Physics, vol. 1. -New York: Springer, 1978.
4. Tricomi I.F. Integral Equations. - New York: Intersciense Publishers, 1957.
5. J.M. Appel, A.S. Kalitvin and P.P. Zabrejko. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. M. Dekkar, New York, 2000.
6. E.W. Sachs and A.K. Strauss. Efficient solution of partial integro-differential equation in finance. // Applied Numerical Math., Vol. 58(11), 2008. - P. 1687-1703.
7. J. Thorwe and S. Bhalekar. Solving partial integro-differential equations using Laplace transform method. // American J. of Computational and Applied Math., Vol. 2(3), 2012. - P. 101-104.