МАТЕМАТИКА

УДК 517.588
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_149

ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Эргашев Тухтасин Гуламжанович, д.ф.-м.н., профессор,
ergashev.tukhtasin@gmail.com
Национальный исследовательский университет «ТИИИМСХ»,
Ташкент, Узбекистан
Арзикулов Зафаржон Одилович, ст.преподаватель,
zafarbekarziqulov1984@mail.ru
Ферганский политехнический институт,
Фергана, Узбекистан
Холмирзаев Мамиржон Ахунжанович, ст.преподаватель,
mamirjonkholmirzayev@gmail.com
Al Fraganus University (негосударственное ВУЗ),
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *Как известно, гипергеометрическая функция Гаусса одного переменного досконально подробно исследована во всех отношениях. Поэтому при изучении свойств гипергеометрических функций многих переменных большое значение имеют формулы разложения, позволяющие представить функцию многих переменных в виде бесконечной суммы произведений нескольких гипергеометрических функций Гаусса, а это, в свою очередь, облегчает процесс изучения свойств функций многих переменных. В литературе известны 34 гипергеометрические функции двух переменных 2-го порядка (список Горна) и для 11 из них в 1940-1941 гг. Берчнелл и Ченди получили более 15 пар разложений с помощью символического метода. Известная формула Пула сыграла важную роль в исследованиях Берчналла и Ченди, но одной этой формулы было недостаточно для разложения всех функций из списка Горна. Поэтому до недавнего времени другие гипергеометрические функции Горна от двух переменных оставались неразложенными. В статье вводятся новые символические операторы типа Берчналла-Ченди, изучаются их свойства и устанавливаются разложения для 5-ти гипергеометрических функций из списка Горна. Показано приложение одной из формул разложения к теории построения фундаментальных решений сингулярных эллиптических уравнений.*

Ключевые слова: гипергеометрические функции двух переменных, список Горна, конфлюэнтная гипергеометрическая функция, формула разложения, символические операторы типа Берчнелла-Ченди.

EXPANSION FORMULAS FOR DOUBLE HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS AND ITS APPLICATION TO THE THEORY OF SINGULAR ELLIPTIC EQUATIONS

Ergashev Tuhtasin, Dr Sc, professor,
ergashev.tukhtasin@gmail.com
National Research University “TIIAME”,
Tashkent, Uzbekistan
Arzikulov Zafarjon, teacher,

zafarbekarziqulov1984@mail.ru
Fergana Polytechnic Institute,
Tashkent, Uzbekistan
Khalmirzayev Mamirjan, teacher,
mamirjonkholmirzayev@gmail.com
Al-Fraganus University, Tashkent, Uzbekistan

Abstract. *It is known that the Gaussian hypergeometric function of one variable has been thoroughly investigated in all respects. Therefore, when studying the properties of hypergeometric functions of many variables, expansion formulas are very important, which make it possible to represent a function of many variables in the form of an infinite sum of products of several hypergeometric Gauss functions, and this, in turn, facilitates the process of studying the properties of functions of many variables. In the literature, 34 hypergeometric functions of two variables of order 2 (Horn List) are known, and for 11 of them in 1940-1941. Burchnall and Chaundy obtained more than 15 pairs of expansions using the symbolic method. The well-known Poole formula played an important role in the studies of Burchnall and Chaundy, but this one formula was not enough for the expansion of all functions from the Horn list. Therefore, until recently, other Horn hypergeometric functions of two variables remained undecomposed. In this paper, new symbolic operators of Burchnall-Chaundy type are introduced, their properties are studied, and an expansion for 5 Horn hypergeometric functions is established. An application of the new expansion formula to the theory of constructing fundamental solutions for singular elliptic equations is shown.*
***Keywords**: double hypergeometric functions, Horn list, confluent hypergeometric function, expansion formula, symbolic operators of Burchnall-Chaundy type.*

1. Введение

Теория специальных функций, как область математического анализа, посвященная исследованию и применению высших трансцендентных функций, имеет давнюю историю и богатое содержание, обусловленное проникновением и взаимосвязями с самыми разнообразными вопросами теории функций, интегральных и дифференциальных уравнений и других разделов математики.

Гипергеометрическая функция Гаусса представима следующим рядом [1, стр.69]

$$F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!},\quad |z|<1,$$

где a, b, c не зависят от z и они могут быть любыми комплексными числами, причем $c\neq 0,-1,-2,...$. Здесь $(\nu)_n$ – символ Похгаммера:

$$(\nu)_0:=1,\ (\nu)_n:=\nu(\nu+1)...(\nu+n-1)=\frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)}$$

а $\Gamma(z)$ – известная гамма-функция.

Большие успехи, достигнутые в теории гипергеометрической функции одного переменного, стимулировали развитие соответствующих теорий для функций от двух или многих переменных. В 1889 г. Горн[2] установил, что существуют 34 существенно различных сходящихся ряда двух переменных порядка 2, и выделил их на полные *(complete)* и конфлюэнтные *(confluent)* ряды.

Для исследования гипергеометрической функции двух переменных очень важны формулы разложения, которые позволяют представить гипергеометрическую функцию двух переменных через бесконечную сумму произведений двух гипергеометрических функций одного переменного, а это, в свою очередь, облегчает процесс изучения свойств функций двух переменных.

С целью нахождения формул разложения для гипергеометрических функций двух переменных, впервые Берчнелл и Ченди ввели операторы [3]

$$\nabla(h)=\frac{\Gamma(h)\Gamma(h+\delta+\sigma)}{\Gamma(h+\delta)\Gamma(h+\sigma)}, \tag{1}$$

$$\Delta(h)=\frac{\Gamma(\delta+h)\Gamma(\sigma+h)}{\Gamma(h)\Gamma(\delta+\sigma+h)}, \tag{2}$$

где

$$\delta\equiv x\frac{\partial}{\partial x},\quad \sigma\equiv y\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3}$$

а $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

С помощью символических операторов (1) и (2) Берчнелл и Ченди получили значительное число разложений [3,4], содержащих гипергеометрические функции из списка Горна.

Отметим, что в работе [5], благодаря, именно, одной из формул разложения Берчнелла-Ченди, удалось выписать в явном виде решение задачи Хольмгрена для одного многомерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами. Кроме того, формулы разложения Берчнелла-Ченди применяются в теории потенциала [6–9] и решении краевых задач [10] для сингулярных эллиптических уравнений.

В исследованиях Берчнелла и Ченди важную роль играла известная формула Пула (Poole) [11, стр.26]

$$(-\delta)_n f(x)=(-x)^n f^{(n)}(x),\quad n=0,1,2,..., \tag{4}$$

однако для разложения всех функций из списка Горна этой одной формулы было недостаточно. Поэтому до недавнего времени остались не разложенными многие гипергеометрические функции двух переменных из списка Горна.

В настоящей работе введем в рассмотрение символические операторы типа Берчнелла-Ченди, с помощью которых удаётся найти формулы разложения для одной конфлюэнтной гипергеометрической функции двух переменных, а также покажем применение полученной формулы разложения.

2. Обобщенные операторы Берчнелла-Ченди и их применения

Введем в рассмотрение следующие обобщенные операторы Берчнелла-Ченди:

$$\tilde{\nabla}_{\alpha x;\beta y}(h):=\frac{\Gamma(h)\Gamma(h+\alpha\delta+\beta\sigma)}{\Gamma(h+\alpha\delta)\Gamma(h+\beta\sigma)}, \tag{5}$$

$$\tilde{\Delta}_{\alpha x;\beta y}(h):=\frac{\Gamma(\alpha\delta+h)\Gamma(\beta\sigma+h)}{\Gamma(h)\Gamma(\alpha\delta+\beta\sigma+h)}, \tag{6}$$

где α и β – целые числа, отличные от нуля, т.е. $\alpha,\beta=\pm1,\ \pm2,\ ...$, а δ и σ – выражения, определенные в (3).

Нетрудно заметить, что в случае $\alpha=\beta=1$ операторы, определенные равенствами (5) и (6), совпадают с операторами Берчнелла-Ченди (1) и (2), соответственно.

Чтобы показать применение обобщенных операторов (5) и (6), возьмем следующую конфлюэнтную гипергеометрическую функцию [1, стр.221]

$$\mathrm{H}_3(a,b;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}(b)_m}{(d)_m\, m!n!}x^m y^n,\ \ |x|<1. \tag{9}$$

Действительно, подействовав оператором (5), получим

$$\mathrm{H}_3\left(a,b;d;x,y\right)=\tilde{\nabla}_{x,-y}\left(a\right)F\left(a,b;d;x\right){}_0F_1(1-a;-y), \qquad (10)$$

где ${}_pF_q$ – обобщенная гипергеометрия функция, определяемая равенством [1, стр.183]

$${}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,...,a_p;z\\ b_1,...,b_q\end{matrix}\right]={}_pF_q(a_r;b_t;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n...(a_p)_n}{(b_1)_n...\left(b_q\right)_n}\frac{z^n}{n!}.$$

Подействовав оператором (6), из отношений (12) – (16) получим, так называемые, обратные операторные формы

$$F\left(a,b;d;x\right)\ {}_0F_1(1-a;-y)=\tilde{\Delta}_{x,-y}\left(a\right)\mathrm{H}_3\left(a,b;d;x,y\right), \qquad (11)$$

Операторные формы (12) – (21) используются для нахождения разложений гипергеометрических функций двух переменных по произведениям обычных гипергеометрических функций и обратно.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Если $f(x)$ – произвольная бесконечно раз дифференцируемая функция, то при любых неотрицательных целых m и n справедливы следующие равенства:*

$$\left(-\delta\right)_m\left(-\delta\right)_n f(x)=\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}(-n)_{m-p}\left(-x\right)^{n+p}\ f^{(n+p)}(x), \qquad (12)$$

$$\left(\delta\right)_m\left(-\delta\right)_n f(x)=\left(-1\right)^n\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}(n+p)_{m-p}x^{n+p}f^{(n+p)}(x), \qquad (13)$$

где $\binom{k}{m}=\dfrac{k!}{m!(k-m)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Доказательство. Справедливость равенств (22) и (23) доказывается методом математической индукции по m.

Заметим, что при $m=0$ равенства (22) и (23) совпадают с известной формулой Пула (4).

Применим лемму 1 к нахождению формул разложения для гипергеометрических функций двух переменных. Рассмотрим более подробно операторную форму (12). По определению (5), имеем

$$\tilde{\nabla}_{x;-y}\left(a\right):=\frac{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(a+\delta-\sigma\right)}{\Gamma\left(a+\delta\right)\Gamma\left(a-\sigma\right)}, \qquad (14)$$

$$\tilde{\nabla}_{x;y}\left(b\right):=\frac{\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(b+\delta+\sigma\right)}{\Gamma\left(b+\delta\right)\Gamma\left(b+\sigma\right)}. \qquad (15)$$

В силу известной формулы Гаусса [1, стр.73]

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\quad\left[Re(c-a-b)>0,\quad c\neq 0,-1,...\right], \qquad (16)$$

правые части равенств (24) и (25) можно представить в виде бесконечных сумм:

$$\tilde{\nabla}_{x;-y}\left(a\right):=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\delta)_m(\sigma)_m}{m!(a)_m}, \qquad (17)$$

$$\tilde{\nabla}_{x;y}\left(b\right):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\delta)_n(-\sigma)_n}{n!(b)_n}. \qquad (18)$$

С учетом равенств (27) и (28) операторная форма (12) принимает вид

$$\mathrm{H}_1\left(a,b;d;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-\delta)_m(\sigma)_m(-\delta)_n(-\sigma)_n}{m!n!(a)_m(b)_n}F\left(a,b;d;x\right){}_1F_1\left(b;1-a;-y\right). \tag{19}$$

Теперь подставив готовые формулы (22) и (23) из леммы 1 в (29) и используя легко проверяюмую формулу (см. формулу Пула (4))

$$(-\delta)_n F(a,b;c;x)=\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\left(-x\right)^n F(a+n,b+n;c+n;x),$$

окончательно получим разложение для $\mathrm{H}_3\left(a,b;d;x,y\right)$ в виде

$$\mathrm{H}_3\left(a,b;d;x,y\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(k)_{m-k}\left(b\right)_m}{m!\left(d\right)_m}(-x)^m F\left(a+m,b+m;d+m;x\right)\times$$

$$\times\frac{1}{\left(1-a\right)_k}(-y)^k{}_0F_1(1-a+k;-y), \tag{20}$$

Используя обратные операторные формы (17) – (21), наряду с (30) – (34), получаем формулы обратного разложения:

$$F\left(a,b;d;x\right){}_0F_1(1-a;y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(k)_{m-k}(a)_{k-m}(b)_k}{m!(1-a)_m(d)_k}\times$$

$$\times x^k y^m\mathrm{H}_3\left(a-m+k,b+k;d+k;x,-y\right), \tag{21}$$

Разложения от (30) до (39) могут быть доказаны без использования символических методов, путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x и y в обеих частях.

3. Применение формулы разложения для $\mathrm{H}_3\left(a,b;d;x,y\right)$.

Формула разложения (32) имеет важные приложения. Например, в работе [12] формула разложения (32) дала возможность выписать решение поставленной задачи в явном виде. Более подробно остановимся в другом приложении формулы (32).

Рассмотрим сингулярное уравнение Гельмгольца

$$\sum_{k=1}^{n-1}u_{x_kx_k}+u_{yy}+\frac{2\beta}{y}u_y-\lambda^2u=0 \tag{22}$$

в полупространстве $y>0$, где $n\geq 2$ – размерность пространства, β – действительное число, причем $0<2\beta<1$, а λ – действительное или чисто мнимое постоянное.

Фундаментальные решения уравнения (40) найдены в [13]:

$$q_1\left(x,y;\xi,\eta\right)=\gamma_1 r^{2-n-2\beta}\mathrm{H}_3\left(\frac{n-2}{2}+\beta,\ \beta;\ 2\beta;\theta,\mu\right), \tag{23}$$

$$q_2\left(x,y;\xi,\eta\right)=\gamma_2 r^{-n+2\beta}y^{1-2\beta}\eta^{1-2\beta}\mathrm{H}_3\left(\frac{n}{2}-\beta,1-\beta;2-2\beta;\theta,\mu\right), \tag{24}$$

где

$$\gamma_1=2^{2\beta-2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+\beta\right)\Gamma\left(\beta\right)}{\pi^{n/2}\Gamma\left(2\beta\right)},\ \ \gamma_2=2^{-2\beta}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\beta\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}{\pi^{n/2}\Gamma\left(2-2\beta\right)},$$

$$x:=\left(x_1,...,x_{n-1}\right),\ \xi:=\left(\xi_1,...,\xi_{n-1}\right);\ \ \theta=1-\frac{r_1^2}{r^2}=-\frac{4y\eta}{r^2},\ \ \mu=-\frac{\lambda^2}{4}r^2,$$

$$r^2=\sum_{k=1}^{n-1}\left(x_k-\xi_k\right)^2+\left(y-\eta\right)^2,\ r_1^2=\sum_{k=1}^{n-1}\left(x_k-\xi_k\right)^2+\left(y+\eta\right)^2;\ \ n\geq 2.$$

Определим порядок особенности фундаментального решения $q_1(x,y;\xi,\eta)$ при $r\to 0$. Для определенности положим $n>2$ (в случае $n=2$ фундаментальные решения $q_1(x,y;\xi,\eta)$ и $q_2(x,y;\xi,\eta)$ при $r\to 0$ имеют логарифмическую особенность [14, стр.41]). Последовательно воспользовавшись формулой разложения (32) и известной формулой Больца [1, стр.113]

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{-a}\,F\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right),$$

получим

$$q_1(x,y;\xi,\eta)=r^{2-n}\tilde{q}_1(x,y;\xi,\eta), \tag{25}$$

где

$$\tilde{q}_1(x,y;\xi,\eta)=\gamma_1 r_1^{-2\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^m(k)_{m-k}(\beta)_m}{m!(2\beta)_m(2-\beta-n)_k}\left(1-\frac{r^2}{r_1^2}\right)^m\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{2k}\times$$
$$\times F\left(1+\beta-\frac{n}{2},\beta+m;2\beta+m;1-\frac{r^2}{r_1^2}\right){}_0F_1\left(2-\beta-\frac{n}{2}+k;\frac{\lambda^2}{4}r^2\right).$$

Покажем, что функция $\tilde{q}_1(x,y;\xi,\eta)$ есть ограниченная величина при $r\to 0$. Действительно, переходя к пределу при $r\to 0$ в $\tilde{q}_1(x,y;\xi,\eta)$, с учетом выражения для коэффициента γ_1 и формулы Гаусса (26), получим

$$\lim_{r\to 0}\tilde{q}_1(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi^{n/2}}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)y^{-\beta},\ \ n>2,\ \ y>0.$$

Таким образом, в силу равенства (43) заключаем, что фундаментальное решение $q_1(x,y;\xi,\eta)$ уравнения (40), определенное формулой (41), имеет особенность порядка r^{2-n} $(n>2)$ при $r\to 0$.

Аналогично доказывается, что второе фундаментальное решение $q_2(x,y;\xi,\eta)$ уравнения (40), определенное равенством (42), также имеет особенность порядка r^{2-n} $(n>2)$ при $r\to 0$.

Отметим, что в работе [13] авторы другим путем [15] установили порядок особенности фундаментальных решений уравнения (40). Нам кажется интересным определить порядок особенности данных фундаментальных решений, используя новую формулу разложения (32) для конфлюэнтной гипергеометрической функции $\mathrm{H}_3(a,b;d;x,y)$.

4. Заключение

В заключении отметим, что в 1940-41 гг. Берчнелл и Ченди, в пределах действия известного соотношения Пула, нашли формулы разложения для некоторого класса гипергеометрических функций двух переменных из списка Горна. В настоящей работе доказаны обобщенные формулы Пула, которые позволили разложить конфлюэнтные гипергеометрические функции H_1 - H_5 в виде бесконечной суммы произведений двух гипергеометрических функций одного переменного. Кроме того, приведены приложения формулы разложения, доказанной для конфлюэнтной гипергеометрической функции двух переменных $\mathrm{H}_3(a,b;d;x,y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. /Г.Бейтмен, А.Эрдейи. – М.: Наука, 1973. 296 с.
2. Horn J. Über die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen // Math.Ann. 1889. No.34. P. 544 – 600.
3. Burchnall J.L., Chaundy T.W. Expansions of Appell’s double hypergeometric functions // The Quarterly Journal of Mathematics (Oxford). 1940. Ser.11. P. 249–270.
4. Burchnall J.L., Chaundy T.W. Expansions of Appell’s double hypergeometric functions(II) // The Quarterly J. of Mathematics, Oxford. 1941. Ser.12. P. 112 - 128.
5. Эргашев Т.Г., Комилова Н.Д. Задача Хольмгрена для многомерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. №63. С. 47–59. DOI: 10.17223/19988621/63/5.
6. Srivastava H.M., Hasanov A., Choi J. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Sohag J.Math. 2015. V.2(1). P.1–10.
7. Berdyshev A.S, Hasanov A., Ergashev T.G. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation.II // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020. V. 65(2). P.316–332.
8. Эргашев Т.Г. Третий потенциал двойного слоя для обобщенного двуосесимметричес-кого уравнения Гельмгольца // Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10. Вып. 4. С.111–122.
9. Эргашев Т.Г. Четвертый потенциал двойного слоя для обобщенного двуосе-симметрического уравнения Гельмгольца // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. №50. С.45–56.
10. Karimov E.T., Nieto J.J. The Dirichlet problem for a 3D elliptic equation with two singular coefficients // Computers and Mathematics with Applications. 2011. 62. P. 214–224. DOI: 10.1016/j.camwa.2011.04.068.
11. Poole E. G. Introduction to the Theory of Linear Differential Equations./E.G.Poole. – Oxford, Clarendon (Oxford University) Press, 1936.
12. Эргашев Т.Г., Сафарбаева Н.М.. Задача Хольмгрена для многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. 62. С. 55–67.
13. Mavlyaviev R.M., Garipov I.B. Fundamental solution of multidimensional axisymmetric Helmholtz equation // Complex variables and elliptic equations. 2016. No.62. P.287–296.
14. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения: /М.М.Смирнов. – М.: Наука, 1966. 292 с.
15. Киприянов И.А., Кононенко В.И. Фундаментальные уравнения B-эллиптических уравнений. Дифференциальные уравнения. 1967, Т.3, №1. С.114 –129.