МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.6
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_115

ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рузиев Менглибай Холтожибаевич, д.ф.-м.н,
mruziev@mail.ru
Юлдашева Наргиза Тахиржоновна,
nyuldasheva87@gmail.com
Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз,
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *Для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с сингулярными коэффициентами в неограниченной области исследована нелокальная задача с обобщенными операторами дробного дифференцирования, ядра которых содержат гипергеометрические функции Гаусса. Применив метод интегральных уравнений, рассматриваемая задача эквивалентным образом сводится к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши. Регуляризовав его методом Карлемана–Векуа находится решение в явном виде.*

Ключевые слова*: краевая задача, сингулярный коэффициент, сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, уравнение смешанного типа, индекс уравнения.*

THE BITSADZE–SAMARSKY TYPE PROBLEM FOR A MIXED-TYPE EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS

Ruziev Menglibay Kholtojibaevich, DSc,
mruziev@mail.ru
Yuldasheva Nargiza Taxirjonovna,
nyuldasheva87@gmail.com
Institute of Mathematics Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Tashkent, Uzbekistan

Abstract: . *For an equation of mixed elliptic-hyperbolic type with singular coefficients in an unbounded domain, a nonlocal problem with generalized fractional differentiation operators whose kernels generalized Gaussian hypergeometric functions is studied. Applying the method of integral equations, the consideration problem is equivalently reduced to solving a singular integral equation with the Cauchy kernel. Regularizing it by the Carleman–Vekua method, we find the solution in an explicit form.*

Keywords: *boundary value problem, singular coefficient, singular integral equation with Cauchy kernel, mixed type equation, index of equation.*

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y\,|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$ комплексной области $z = x + iy$, где $D^+ -$ полуплоскость $y > 0$, $D^- -$ конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками ОС и ВС уравнения исходящими из точек $O(0,0)$ и $B(1,0)$ и отрезком ОВ прямой $y = 0$, $I = \{(x,y): 0 < x < 1,\ y = 0\}$.

В уравнение (1) $m,\ \alpha_0,\ \beta_0 -$ некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0,\ |\alpha_0| < \frac{m+2}{2},\ -\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$.

Введем следующие обозначения:

$$I_1 = \{(x,y): -\infty < x < 0, y = 0\},\ I_2 = \{(x,y): 1 < x < \infty, y = 0\}.$$

Свойства решений уравнения (1) существенно зависят от коэффициентов α_0 и β_0 при младших членах уравнения (1). На плоскости параметров $\alpha_0 O \beta_0$ рассматривается треугольник $A_0 B_0 C_0$, ограниченный прямыми $B_0 C_0 : \beta_0 - \alpha_0 = -m/2$, $A_0 C_0 : \beta_0 + \alpha_0 = -m/2$, $A_0 B_0 : \beta_0 = 1$, и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0, \beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются краевые задачи для уравнения (1).

Пусть $P(\alpha_0, \beta_0) \in A_0 B_0 C_0$.

Задача. Найти в области D функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, где $\bar{D} = D^+ \cup \overline{D^-} \cup \overline{I_1} \cup \overline{I_2}$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в области $D^+ \cup D^-$;

3) выполняются равенства

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y) = 0, R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}, y \ge 0; \tag{2}$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{y=0} = \varphi_i(x),\ \ \forall x \in \overline{I_i}, \tag{3}$$

$$A_1 (I_{0+}^{-\alpha,0,\alpha+\beta-1} u[\Theta(t)])(x) + A_2 u(x,0) = g(x), \tag{4}$$

а также условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to-0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I, \tag{5}$$

причем эти пределы при $x = -1$, $x = 1$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - \alpha - \beta$, где $\alpha = \frac{m + 2(\beta_0 + \alpha_0)}{2(m+2)}$, $\beta = \frac{m + 2(\beta_0 - \alpha_0)}{2(m+2)}$, $g(x)$, $\varphi_i(x)-$ заданные функции, функции $\varphi_i(x)$, $i = 1,2$ удовлетворяют условию Гельдера на любых отрезках

$[-N,-1]$, $[1,N]$, $N>1$ и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $\varphi_i(x)\le M\,|\,x\,|^{-\delta}$, где δ, M -положительные постоянные, $\Theta_0(x)$ - точка пересечения характеристик уравнения (1) выходящих из точки $(x,0)\in I$, с характеристикой ОС, A_1, A_2 – постоянные числа.

$(I_{0+}^{\mu,\rho,\eta} f)(x)$ –оператор обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,b,c;z)$, введенный М.Сайго [1, С.326] и имеющий при действительных μ,ρ,η и $x>0$ вид

$$(I_{0+}^{\mu,\rho,\eta} f)(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{-\mu-\rho}}{\Gamma(\mu)}\displaystyle\int_0^x (x-t)^{\mu-1}F\left(\mu+\rho,-\eta;\mu;1-\frac{t}{x}\right)f(t)dt, \mu>0,\\ \left(\dfrac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{\mu-n,\rho-n,\eta-n} f)(x),\ \mu\le 0, n=[-\mu]+1.\end{cases} \tag{6}$$

Заметим, что если $\mu>0$, то справедливы формулы

$$(I_{0+}^{\mu,-\mu,\eta} f)(x)=(I_{0+}^{\mu} f)(x), (I_{0+}^{-\mu,\mu,\eta} f)(x)=(D_{0+}^{\mu} f)(x), \tag{7}$$

в частности

$$(I_{0+}^{0,0,\eta} f)(x)=f(x), (I_{1-}^{0,0,\eta} f)(x)=f(x), \tag{8}$$

где $(I_{0+}^{\mu} f)(x)$ и $(D_{0+}^{\mu} f)(x)$ – операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана–Лиувилля порядка $\mu>0$ [1, С.85];

$$(I_{0+}^{\mu} f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^x (x-t)^{\mu-1} f(t)dt,\ \ \mu>0,\ \ x>0,$$

$$(D_{0+}^{\mu} f)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\mu)}\int_0^x (x-t)^{n-\mu-1} f(t)dt,\ \ \ \mu>0,\ \ n=[\mu]+1.$$

Решение видоизмененной задачи Коши, в области D^- имеет вид [2]

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\gamma_1\int_0^1 \tau_2\left(x+\frac{2}{m+2}(2t-1)(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt+\\&+\gamma_2(-y)^{1-\beta_0}\int_0^1 \nu_2\left(x+\frac{2}{m+2}(2t-1)(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt,\end{aligned} \tag{9}$$

где $\gamma_1=\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$, $\gamma_2=-\dfrac{2\Gamma(1-\alpha-\beta)}{(m+2)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}$.

Используя формулу (9) и соотношение (6) имеем

$$u[\Theta_0(x)]=\gamma_1\Gamma(\alpha)(I_{0+}^{\alpha,0,\beta-1}\tau)(x)+\gamma_2\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-\alpha-\beta}\Gamma(1-\beta)(I_{0+}^{1-\beta,\alpha+\beta-1,\beta-1}\nu)(x).$$

Подставляя $u[\Theta_0(x)]$ в краевое условие (4), в силу (7) и (8), получим

$$(A_1\gamma_1\Gamma(\alpha)+A_2)\tau(x)+A_1\gamma_2\Gamma(1-\beta)\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-\alpha-\beta}(I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\nu(t))(x)=g(x). \quad (10)$$

Применив к обеим частям равенства оператор $D_{0+}^{1-\alpha-\beta}$, с учетом

$$\left(D_{0+}^{\alpha}(I_{0+}^{\alpha}f)(t)\right)(x)=f(x), \quad \alpha>0$$

имеем

$$(A_1\gamma_1\Gamma(\alpha)+A_2)(D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(t))(x)+A_1\gamma_2\Gamma(1-\beta)\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-\alpha-\beta}\nu(x)=(D_{0+}^{1-\alpha-\beta}g)(x).$$

Выразим из последнего выражения $\nu(x)$, тогда имеем

$$\nu(x)=\lambda_1\left(D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(t)\right)(x)+F(x), \quad (11)$$

где

$$\lambda_1=-\frac{A_1\gamma_1\Gamma(\alpha)+A_2}{A_1\gamma_2\Gamma(1-\beta)\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-\alpha-\beta}}, \quad F(x)=\frac{(D_{0+}^{1-\alpha-\beta}g)(x)}{A_1\gamma_2\Gamma(1-\beta)\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-\alpha-\beta}}.$$

Решение задачи Дирихле в области D^{+}, удовлетворяющее условиям (2), (3) и условию $u(x,0)=\tau(x)$, $x\in\bar{I}$, представимо в виде [3]

$$u(x,y)=k_2(1-\beta_0)y^{1-\beta_0}\int_0^1\tau(t)(r_0^2)^{a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)dt+F_1(x,y), \quad (12)$$

где $r_0^2=(x-t)^2+\dfrac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}$,

$$F_1(x,y)=k_2(1-\beta_0)y^{1-\beta_0}\left(\int_{-\infty}^{0}\varphi_1(t)(r_0^2)^{a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)dt+\right.$$

$$\left.+\int_1^{\infty}\varphi_2(t)(r_0^2)^{a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)dt\right),$$

$$k_2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2a}\frac{\Gamma(1-l)\Gamma(1-\bar{l})}{\Gamma(2-l-\bar{l})}, \quad 2a=\alpha+\beta, \quad l=a+bi, \quad b=-\frac{\alpha_0}{m+2}.$$

Дифференцируя (12) по y и учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y}y^{1-\beta_0}\left(\left[(x-t)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)\right)=$$

$$=\frac{m+2}{2}y^{-\beta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left((x-t)\left[(x-t)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)\right),$$

получим

$$\frac{\partial u}{\partial y}=k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}y^{-\beta_0}\int_0^1\tau(t)\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial t}\left((x-t)\left[(x-t)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)\right)dt+\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}. \tag{13}$$

Выполнив операцию интегрирования по частям в правой части равенства (13) с учетом $\tau(0)=0$, $\tau(1)=0$, и после несложных вычислений имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}y^{-\beta_0}\int_0^1\tau'(t)(x-t)\times$$

$$\times\left[(x-t)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]^{a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)dt+\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y). \tag{14}$$

Умножая обе части равенства (14) на y^{β_0}, затем переходя к пределу при $y\to+0$, получим

$$\nu(x)=-k_2\frac{m+2}{2}\int_0^1\tau'(t)(x-t)\,|x-t|^{2a-2}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{|t-x|}\right)dt+\Phi(x),\quad x\in(-1,1), \tag{15}$$

где

$$\Phi(x)=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y)=k_2(1-\beta_0)^2\times$$

$$\times\left(e^{b\pi}\int_{-\infty}^0\varphi_1(t)(x-t)^{2a-2}dt+e^{-b\pi}\int_1^\infty\varphi_2(t)(t-x)^{2a-2}\right)dt.$$

Равенство (15) есть функциональное соотношение между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное на I из эллиптической части D^+ смешанной области D.

В силу (5) исключая функцию $\nu(x)$ из (11) и (15), получим

$$\lambda_1(D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(t))(x)=$$

$$=-k_2\frac{m+2}{2}\int_0^1\tau'(t)(x-t)\,|x-t|^{2a-2}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{|t-x|}\right)dt+\Phi_1(x),\quad x\in(-1,1), \tag{16}$$

где $\Phi_1(x)=\Phi(x)-F(x).$ Применив оператор $\Gamma(1-\alpha-\beta)D_{0+}^{\alpha+\beta-1}$ к обеим частям равенства (16) и учитывая что, $\left(D_{0+}^{\alpha+\beta-1}(D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau)(t)\right)(x)=\tau(x),$ имеем

$$\lambda_1\Gamma(1-\alpha-\beta)\tau(x)=$$

$$=-k_2\frac{m+2}{2}\Gamma(1-\alpha-\beta)D_{0+}^{\alpha+\beta-1}\int_0^1\tau'(t)(x-t)\,|\,x-t\,|^{2a-2}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{|\,t-x\,|}\right)dt+$$

(17)

$$+\Gamma(1-\alpha-\beta)D_{0+}^{\alpha+\beta-1}\Phi_1(x),\quad x\in(-1,1).$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\Gamma(1-\alpha-\beta)D_{0+}^{\alpha+\beta-1}\int_0^x\tau'(t)(x-t)^{2a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{|\,t-x\,|}\right)dt=$$

$$=\frac{\pi e^{b\pi}\tau(x)}{\sin((\alpha+\beta)\pi)},\tag{18}$$

$$\Gamma(1-\alpha-\beta)D_{0+}^{\alpha+\beta-1}\int_x^1\tau'(t)(t-x)^{2a-1}\exp\left(-2b\arcsin\frac{t-x}{|\,t-x\,|}\right)dt=$$

$$=\pi e^{-b\pi}ctg((\alpha+\beta)\pi)\tau(x)-e^{-b\pi}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha-\beta}\frac{\tau(t)dt}{t-x}.\tag{19}$$

Подставляя (18)-(19) в (17), имеем

$$\lambda_1\Gamma(1-\alpha-\beta)\tau(x)=-k_2\frac{m+2}{2}\times$$

$$\times\left[\frac{\pi e^{b\pi}\tau(x)}{\sin((\alpha+\beta)\pi)}-\pi e^{-b\pi}ctg((\alpha+\beta)\pi)\tau(x)+e^{-b\pi}\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha-\beta}\frac{\tau(t)dt}{t-x}\right]+\tag{20}$$

$$+\Gamma(1-\alpha-\beta)D_{0+}^{\alpha+\beta-1}\Phi_1(x),\ \ x\in(-1,1)$$

Равенство (20) запишем в виде

$$\tau(x)-\lambda\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha-\beta}\frac{\tau(t)dt}{t-x}=g_0(x),\quad x\in[0,1],\tag{21}$$

где

$$\lambda=\frac{e^{-b\pi}}{\dfrac{2\lambda_1\Gamma(1-\alpha-\beta)}{k_2(m+2)}+\dfrac{\pi}{\sin((\alpha+\beta)\pi)}\left(e^{b\pi}-e^{-b\pi}\cos(\alpha+\beta)\pi\right)},$$

$$g_0(x)=\lambda e^{b\pi}\left(\frac{2}{k_2(m+2)}\Gamma(1-\alpha-\beta)D_{0+}^{\alpha+\beta-1}\Phi_1(x)\right).$$

Полагая $x^{\alpha+\beta-1}\tau(x)=\rho(x)$, $x^{\alpha+\beta-1}g_0(x)=g_1(x)$, уравнение (21) перепишем в виде

$$\rho(x)-\lambda\int_0^1\frac{\rho(t)dt}{t-x}=g_1(x),x\in[0,1].\tag{22}$$

Решение уравнения (22) будем искать в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера на $(0,1)$ и ограниченных при $x\to1$, а при $x\to0$ возможно обращающихся в бесконечность порядка меньше $1-\alpha-\beta$. В этом классе индекс уравнения (22) равен нулю, а его решение методом Карлемана - Векуа ([4], с.320) находится в явном виде

$$\rho(x)=\frac{g_1(x)}{1+\lambda^2\pi^2}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2\pi^2}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\theta}\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\theta}\frac{g_1(t)dt}{t-x},$$

где

$$\theta=\frac{arctg(\lambda\pi)}{\pi},\ 0<\theta<1/2.$$

Отсюда, возвращаясь к прежним функциям, получим

$$\tau(x)=\frac{g_0(x)}{1+\lambda^2\pi^2}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2\pi^2}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\theta}\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\theta}\left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{g_0(t)dt}{t-x}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения: монография / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Салахитдинов М.С. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами: монография / М.С. Салахитдинов, М. Мирсабуров. – Ташкент: Университет, 2005.
3. Ruziev M. Tricomi type equations with terms of lower order. / M. Ruziev, M. Reissig // Journal of Dynamical Systems and Differential Equations. 2016. Vol. 6. № 1. P. 14.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения: Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике: монография / Мусхелишвили Н.И. – Москва: Наука, 1968. - 511 с.