МАТЕМАТИКА

УДК 517.95
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_104

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ В ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Матанова Калыскан Базарбаевна, к.ф.-м.н., доцент,
kalys.matanova@manas.edu.kg.
Кыргызско-Турецкий университет «Манас»,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *В данной статье исследована обратная задача для одного класса псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами с неизвестной правой частью, представляющей собой сумму нескольких пространственно-локализованных источников, интенсивности которых меняются со временем и неизвестны. В качестве дополнительной информации задаются значения температуры в некоторых точках, как функции времени. С помощью функции Грина смешанной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, а также методом резольвент и методом функции Грина найдены условия существования и единственности решения обратной задачи.*

Ключевые слова: *обратная задача, псевдопараболическое уравнение третьего порядка, резольвента, интегральное уравнение Вольтерра второго рода, функция Грина.*

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕДЕ БУЛАКТАРДЫ АНЫКТОО МАСЕЛЕСИ

Матанова Калыскан Базарбаевна, ф.-м.и.к., доцент,
kalys.matanova@manas.edu.kg.
Кыргыз-Түрк «Манас» университети,
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация: *Бул макалада үчүнчү тартиптеги өзгөрмөлүү коэффициенттүү псевдопараболалык теңдемелердин бир классы үчүн булактарды аныктоо тескери маселеси изилденген. Оң жагы убакыттын өтүшү менен өзгөрүп турган жана белгисиз болгон бир нече мейкиндик-локалдашкан булактардын суммасы түрүндө берилген. Кошумча маалымат катары кээ бир чекиттердеги убакыттын функциясы болгон температуранын маанилери берилет. Экинчи тартиптеги өзгөрмөлүү коэффициенттүү кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн аралаш чектик маселенин Грин функциясынын жардамы менен, ошондой эле резольвента жана Грин функциясы ыкмаларын колдонуп, тескери маселенин чыгарылышынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары табылды.*

Ачкыч сөздөр: *тескери маселе, үчүнчү тартиптеги псевдопараболалык теңдеме, резольвента, Вольтерранын 2-түрдөгү интегралдык теңдемеси, Грин функциясы.*

DETERMINING SOURCES PROBLEM IN A PSEUDOPARABOLIC EQUATION OF THE THIRD ORDER

Matanova Kalyskan Bazarbaevna, Cand.Sc., Associate Professor,
kalys.matanova@manas.edu.kg.
Kyrgyz-Turkish Manas University,
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract: *In this paper, the inverse source problem for a class of third-order pseudo-parabolic equations with variable coefficients is investigated. The right part is the sum of several spatially localized sources whose intensities change over time and are unknown. As additional information, the temperature values at some points are set as a function of time. Using the Green function of a mixed boundary value problem for second-order ordinary differential equations with variable coefficients, as well as the resolvent method and the Green function method, the conditions for the existence and uniqueness of the solution of the inverse problem are found.*

Keywords: *inverse problem, pseudoparabolic equation of the third order, resolvent, Volterra integral equation of the second kind, Green's function.*

В теории уравнений с частными производными важное место занимают исследования, посвященные обратным задачам. Обратные задачи возникают в ситуациях, когда структура математической модели исследуемого процесса известна, нужно ставить задачи определения параметров самой математической модели. К таким задачам относятся задачи определения различных коэффициентов уравнений, либо внешнего воздействия, либо граничных или начальных условий и пр. [1].

Особый, достаточно широкий класс представляют обратные задачи для уравнений в частных производных, поскольку такими уравнениями описываются математические модели самых разнообразных процессов во многих областях физики и техники. Например, при изучении движения дисперсионной волны, плазменной волны, волн в упругой среде [2], импульсивного движения плоской пластины [3], при изучении задач моделирования фильтрации жидкости в пористых средах и процесса влагопереноса в почве [4] возникают уравнения в частных производных третьего порядка. Вопросы разрешимости обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными изучены многими авторами [5-8].

Как правило, в задачах по определению неизвестного источника предполагается, что он определяется произведением двух функций, одна из которых неизвестна, а другая задана. Вместе с тем, возможны случаи, когда источник определяется несколькими неизвестными функциями.

В данной работе исследуется обратная задача для уравнения третьего порядка с частными производными и переменными коэффициентами с неизвестной правой частью, представляющей собой сумму нескольких пространственно-локализованных источников, интенсивности которых меняются со временем и неизвестны. В качестве дополнительной информации необходимой для определения неизвестных интенсивностей задаются значения температуры в некоторых точках как функции времени [9].

Постановка задачи. Требуется найти функции $u(x,t)$ и $\varphi_i(t)$ ($i=\overline{1,n}$) в области $G=\{(x,t):\ \ a\le x\le b,\ 0\le t\le T\}$, удовлетворяющие уравнению

$$u_t(x,t)=\alpha\left(Au(x,t)\right)_t+\beta\left(Au(x,t)\right)+b_0(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+b_1(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+$$
$$+b_2(x,t)u(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)f_i(x,t)+F(x,t), \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in[a,b], \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u_x(a,t)=0,\quad u(b,t)=0,\quad t\in[0,T] \tag{3}$$

по известным следам решения искомой функции $u(x, t)$ в точках x_i, $i=1, 2,\ldots n$,

$$u(x_i.t)=g_i(t),\qquad 0<x_1<x_2<\ldots<x_n<1,\ \ t\in[0,T], \tag{4}$$

где

$$Au(x,t)=u_{xx}(x,t)+p(x)u_x(x,t)+\left(q(x)+\frac{1}{\alpha}\right)u(x,t),$$

α, β - заданные числа, $\alpha\ne 0$, $b_0(x,t)$, $b_1(x,t)$, $b_2(x,t)$, $f_i(x,t)$, $g_i(t)\left(i=\overline{1,n}\right)$, $F(x,t)$, $u_0(x)$, $p(x)$, $q(x)$ - заданные непрерывные функции, коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ представимы в следующем виде [10]:

$$q(x)=K^2(x)+\beta^2(x)+K'(x)-\frac{\beta'(x)}{\beta(x)}K(x),$$

$$K(x)=\frac{1}{2}\left[p(x)+\frac{\beta'(x)}{\beta(x)}\right],$$

здесь $K'(x)$, $\beta'(x)$ - производные функций $K(x)$ и $\beta(x)$, $\beta(x)\ne 0$ для всех $x\in[a,b]$. Пусть также выполняются условия согласования

$$u_0(a)=u_0(b)=0,\quad u_0(x_i)=g_i(0),\quad i=\overline{1,n}.$$

Для решения обратной задачи введем обозначение

$$v(x,t)=u_t(x,t)$$

Тогда

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,s)ds+u_0(x) \tag{5}$$

и уравнение (1), граничные условия (3) относительно $v(x,t)$ запишутся в виде:

$$v(x,t)=\alpha\left(Av(x,t)\right)+\beta\int_0^t Av(x,s)\,ds+\beta\left(Au_0(x)\right)+b_0(x,t)\left(\int_0^t\frac{\partial^2 v(x,s)}{\partial x^2}ds+u_0''(x)\right)+$$
$$+b_1(x,t)\left(\int_0^t\frac{\partial v(x,s)}{\partial x}ds+u_0'(x)\right)+b_2(x,t)\left(\int_0^t v(x,s)\,ds+u_0(x)\right)+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)f_i(x,t)+F(x,t), \tag{6}$$

$$v_x(a,t)=v(b,t)=0. \tag{7}$$

Уравнение (6) выразим через Av:

$$Av(x,t) = -\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t Av(x,s)\,ds + \frac{1}{\alpha}v(x,t) - \frac{\beta}{\alpha}Au_0(x) -$$
$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^t \left[\frac{\partial^2 v(x,s)}{\partial x^2}b_0(x,t) + \frac{\partial v(x,s)}{\partial x}b_1(x,t) + v(x,s)b_2(x,t)\right]ds - \tag{8}$$
$$-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)f_i(x,t) - \frac{1}{\alpha}\left[b_0(x,t)u_0''(x) + b_1(x,t)u_0'(x) + b_2(x,t)u_0(x)\right] - \frac{1}{\alpha}F(x,t).$$

(8) относительно $Av(x, t)$ является интегральным уравнением Вольтерра второго рода с ядром-константой $-\frac{\beta}{\alpha}$. Применяя его резольвенту $R(t,s) = -\frac{\beta}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-s)}$, найдем

$$Av(x,t) = \frac{1}{\alpha}v(x,t) - \frac{1}{\alpha}\int_0^t \left[\frac{\partial^2 v(x,s)}{\partial x^2}b_0(x,t) + \frac{\partial v(x,s)}{\partial x}b_1(x,t) + v(x,s)b_2(x,t)\right]ds -$$
$$-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)f_i(x,t) + \frac{1}{\alpha}\int_0^t R(t,s)v(x,s)\,ds -$$
$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^t\int_0^s R(t,s)\left[\frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x^2}b_0(x,s) + \frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x}b_1(x,s) + v(x,\tau)b_2(x,s)\right]d\tau ds - \tag{9}$$
$$-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t R(t,s)\varphi_i(s)f_i(x,s)\,ds + F_1(x,t),$$

где

$$F_1(x,t) = -\frac{1}{\alpha}\left[\beta Au_0(x) + b_0(x,t)u_0''(x) + b_1(x,t)u_0'(x) + b_2(x,t)u_0(x) + F(x,t)\right] -$$
$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^t R(t,s)\left[\beta Au_0(x) + b_0(x,s)u_0''(x) + b_1(s,t)u_0'(x) + b_2(x,s)u_0(x) + F(x,s)\right]ds.$$

Применяя к двойному интегралу формулу Дирихле изменения порядка интегрирования, уравнение (9) преобразуем к виду

$$Av(x,t) - \frac{1}{\alpha}v(x,t) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^t \left\{\left[b_0(x,t) + \int_s^t R(t,\tau)b_0(x,\tau)d\tau\right]\frac{\partial^2 v(x,s)}{\partial x^2} + \right.$$
$$\left. + \left[b_1(x,t) + \int_s^t R(t,\tau)b_1(x,\tau)d\tau\right]\frac{\partial v(x,s)}{\partial x} + \left[b_2(x,t) - R(t,s) + \int_s^t R(t,\tau)b_2(x,\tau)d\tau\right]v(x,s)\right\}ds -$$
$$-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\phi_i(t)f_i(x,t) - \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t R(t,s)\phi_i(s)f_i(x,s)ds + F_1(x,t)$$

и введем обозначения

$$r_0(x,t,s) = -\frac{1}{\alpha}\left[b_0(x,t) + \int_s^t R(t,\tau)b_0(x,\tau)d\tau\right]$$

$$r_1(x,t,s) = -\frac{1}{\alpha}\left[b_1(x,t) + \int_s^t R(t,\tau)b_1(x,\tau)d\tau\right]$$

$$r_2(x,t,s) = -\frac{1}{\alpha}\left[b_2(x,t) - R(t,s) + \int_s^t R(t,\tau)b_2(x,\tau)d\tau\right].$$

Тогда последнее уравнение примет вид

$$
Av(x,t)-\frac{1}{\alpha}v(x,t)=\int_0^t\left\{r_0(x,t,s)\frac{\partial^2 v(x,s)}{\partial x^2}+r_1(x,t,s)\frac{\partial v(x,s)}{\partial x}+r_2(x,t,s)v(x,s)\right\}ds-
$$
$$
-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\phi_i(t)\,f_i(x,t)-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t R(t,s)\phi_i(s)\,f_i(x,s)ds+F_1(x,t) \tag{10}
$$

Если рассматривать правую часть как известную функцию, то (10) вместе с условиями (7) представляет собой краевую задачу для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка относительно $v(x,t)$ по переменной x и его решение с помощью функции Грина [11] запишется в виде

$$
v(x,t)=\int_0^t\int_a^b G(x,\xi)\left\{r_0(\xi,t,s)\frac{\partial^2 v(\xi,s)}{\partial \xi^2}+r_1(\xi,t,s)\frac{\partial v(\xi,s)}{\partial \xi}+r_3(\xi,t,s)v(\xi,s)\right\}d\xi ds
$$
$$
-\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\phi_i(t)\int_a^b G(x,\xi)f_i(\xi,t)d\xi-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\phi_i(s)\int_a^b G(x,\xi)R(t,s)\,f_i(\xi,s)d\xi ds+\int_a^b G(x,\xi)F_1(\xi,t)d\xi, \tag{11}
$$

где $G(x,\xi)$ - функция Грина, которая определяется из следующей формулы [12]:

$$
G(x,\xi)=\begin{cases}
\dfrac{-e^{-\int_\xi^x K(s)ds}\sin\left(\int_\xi^b\beta(s)ds\right)\left[\beta(a)\cos\left(\int_a^x\beta(s)ds\right)+K(a)\sin\left(\int_a^x\beta(s)ds\right)\right]}{\beta(\xi)\left[K(a)\sin\left(\int_a^b\beta(s)ds\right)+\beta(a)\cos\left(\int_a^b\beta(s)ds\right)\right]}, & a\le x\le\xi\le b,\\[2ex]
\dfrac{-e^{-\int_\xi^x K(s)ds}\sin\left(\int_x^b\beta(s)ds\right)\left[\beta(a)\cos\left(\int_a^\xi\beta(s)ds\right)+K(a)\sin\left(\int_a^\xi\beta(s)ds\right)\right]}{\beta(\xi)\left[K(a)\sin\left(\int_a^b\beta(s)ds\right)+\beta(a)\cos\left(\int_a^b\beta(s)ds\right)\right]}, & a\le\xi\le x\le b.
\end{cases}
$$

Для упрощения записи введем обозначения

$$
K_i(x,t,s)=-\frac{1}{\alpha}\int_a^b G(x,\xi)R(t,s)\,f_i(\xi,s)d\xi\,,
$$
$$
P_i(x,t)=\frac{1}{\alpha}\int_a^b G(x,\xi)\,f_i(\xi,t)d\xi\;\; F_2(x,t)=\int_a^b G(x,\xi)F_1(\xi,t)d\xi\,,
$$
$$
v_1(x,t)=\frac{\partial v(x,t)}{\partial x},\quad v_2(x,t)=\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\,.
$$

Тогда выражение (11) примет вид:

$$
v(x,t)+\sum_{i=1}^{n}P_i(x,t)\varphi_i(t)=\int_0^t\int_a^b G(x,\xi)\{r_2(\xi,t,s)v(\xi,s)+r_1(\xi,t,s)v_1(\xi,s)+
$$
$$
+r_0(\xi,t,s)v_2(\xi,s)\}\,d\xi ds+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t K_i(x,t,s)\varphi_i(s)\,ds+F_2(x,t). \tag{12}
$$

Продифференцируем (11) по x два раза, учитывая при этом, что производная функции Грина в точке $x=\xi$ испытывает скачок, равный единице:

$$\nu_1(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_i(x,t)}{\partial x}\varphi_i(t)=\int_0^t\int_a^b\frac{\partial G(x,\xi;t)}{\partial x}\{r_2(\xi,t,s)v(\xi,s)+ \\ +r_1(\xi,t,s)v_1(\xi,s)+r_0(\xi,t,s)v_2(\xi,s)\}\,d\xi ds+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\frac{\partial K_i(x,t,s)}{\partial x}\varphi_i(s)\,ds+\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial x}, \tag{13}$$

$$\nu_2(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P_i(x,t)}{\partial x^2}\varphi_i(t)=\int_0^t\int_a^b\left.\frac{\partial^2 G(x,\xi;t)}{\partial x^2}\right|_{\xi\neq x}\{r_2(\xi,t,s)v(\xi,s)+ \\ +r_1(\xi,t,s)v_1(\xi,s)+r_0(\xi,t,s)v_2(\xi,s)\}\,d\xi ds+ \\ +\int_0^t\{r_2(x,t,s)v(x,s)+r_1(x,t,s)v_1(x,s)+r_0(x,t,s)v_2(x,s)\}ds+ \\ +\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\frac{\partial^2 K_i(x,t,s)}{\partial x^2}\varphi_i(s)\,ds+\frac{\partial^2 F_2(x,t)}{\partial x^2}. \tag{14}$$

В силу переопределения при $x=x_j\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ из (12) имеем

$$\sum_{i=1}^{n}P_i(x_j,t)\varphi_i(t)=\int_0^t\int_a^b G(x_j,\xi)\{r_2(\xi,t,s)v(\xi,s)+r_1(\xi,t,s)v_1(\xi,s)+ \\ +r_0(\xi,t,s)v_2(\xi,s)\}\,d\xi ds+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t K_i(x_j,t,s)\varphi_i(s)\,ds+F_2(x_j,t)-g_j'(t). \tag{15}$$

Таким образом, обратная задача (1)–(4) эквивалентна следующей системе из n+3 уравнений (12)-(15) с n+3 неизвестными, которая в матричной форме имеет вид:

$$P(x,t)\,y(x,t)=\int_0^t\int_a^b B(x,\xi,t,s)y(\xi,s)d\xi ds+\int_0^t C(x,t,s)y(x,s)ds+D(x,t)\ , \tag{16}$$

где $y(x,t)=colon\left(v(x,t),v_1(x,t),v_2(x,t),\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)\right)$,

$$P(x,t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & P_1(x,t) & \cdots & P_n(x,t) \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{\partial P_1(x,t)}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial P_n(x,t)}{\partial x} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{\partial^2 P_1(x,t)}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 P_n(x,t)}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & 0 & P_1(x_1,t) & \cdots & P_n(x_1,t) \\ 0 & 0 & 0 & P_1(x_2,t) & \cdots & P_n(x_2,t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & P_1(x_n,t) & \cdots & P_n(x_n,t) \end{pmatrix},$$

$$B(x,\xi,t,s)=\begin{pmatrix} G(x,\xi)r_2(\xi,t,s) & G(x,\xi)r_1(\xi,t,s) & G(x,\xi)r_0(\xi,t,s) & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}r_2(\xi,t,s) & \dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}r_1(\xi,t,s) & \dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}r_0(\xi,t,s) & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2}r_2(\xi,t,s) & \dfrac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2}r_1(\xi,t,s) & \dfrac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial x^2}r_0(\xi,t,s) & 0 & \cdots & 0 \\ G(x_1,\xi)r_2(\xi,t,s) & G(x_1,\xi)r_1(\xi,t,s) & G(x_1,\xi)r_0(\xi,t,s) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & 0 & \cdots & 0 \\ G(x_n,\xi)r_2(\xi,t,s) & G(x_n,\xi)r_1(\xi,t,s) & G(x_n,\xi)r_0(\xi,t,s) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$C(x,t,s)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & K_1(x,t,s) & \cdots & K_n(x,t,s) \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial K_1(x,t,s)}{\partial x} & \cdots & \dfrac{\partial K_n(x,t,s)}{\partial x} \\ r_2(x,t,s) & r_1(x,t,s) & r_0(x,t,s) & \dfrac{\partial^2 K_1(x,t,s)}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 K_n(x,t,s)}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & 0 & K_1(x_1,t,s) & \cdots & K_n(x_1,t,s) \\ 0 & 0 & 0 & K_1(x_2,t,s) & \cdots & K_n(x_2,t,s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & K_1(x_n,t,s) & \cdots & K_n(x_n,t,s) \end{pmatrix},$$

$$D(x,t)=colon\left(F_2(x,t),\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial x},\frac{\partial^2 F_2(x,t)}{\partial x^2},F_2(x_1,t),\ldots,F_2(x_n,t)\right).$$

Предполагаем, что

$$det\, P(x,t)\neq 0 \tag{17}$$

при всех $(x, t)\in G$. Тогда существует обратная матрица $P^{-1}(x, t)$, умножив на которую обе части (16) слева, получим систему линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода с двумя независимыми переменными

$$y(x,t)=\int_0^t\int_a^b P^{-1}(x,t)B(x,\xi,t,s)y(\xi,s)d\xi ds+\int_0^t P^{-1}(x,t)C(x,t,s)y(x,s)ds+P^{-1}(x,t)D(x,t),$$

которая имеет единственное непрерывное решение. В силу обозначения (5) находим искомую функцию $u(x,t)$. Таким образом, доказана следующая

Теорема. Если заданные функции принадлежат пространствам $p(x),\, q(x)\in C[a,b]$, $b_0(x,t),\ \ b_1(x,t),\ \ b_2(x,t),\ \ b_3(x,t),\ \ f_i(x,t),\ \ F(x,t)\in C(G),\ u_0(x)\in C^2[a,b]$, $g_i(t)\in C^1[0,T],\, i=\overline{0,n}$ и выполняется условие (17), то обратная задача (1)–(4) имеет единственное решение $\{u(x,t),\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)\}$, принадлежащее пространству $C^{2,1}(G)\times C_n[0,T]$.

Пример. Доказать существование и единственность решения в пространстве $C^{2,1}(G)\times C[0,T],\, G=\{(x,t): 1\le x\le 4, 0\le t\le T,\ \}$ следующей обратной задачи:

$$u_t(x,t)=\left(Au(x,t)\right)'_t+\left(Au(x,t)\right)+2\varphi(t)+8, \tag{18}$$

$$u'(1,t)=u(4,t)=0, \tag{19}$$

$$u(x,0)=\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}-1,$$

$$u(2,t)=t^2-1, \tag{21}$$

$$Au(x,t)=u''_{xx}(x,t)+\frac{1}{2x}u'_x(x,t)+\left(\frac{1}{x}+1\right)u(x,t).$$

Решение. Здесь $\alpha=1,\quad \beta=1,\quad b(x,t)=0,\quad f(x,t)=2,\quad p(x)=\frac{1}{2x},\quad q(x)=\frac{1}{x}$, $F(x,t)=8,\ u_0(x)=\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}-1,\ x_0=2,\quad g(t)=t^2-1.$ Все заданные функции удовлетворяют условиям теоремы и имеют место условия согласования:

$$u_0'(1)=u(4)=0,\quad u_0(2)=g(0)=-1\,.$$

Необходимо проверить выполнение условия (17). Функция Грина имеет вид

$$G(x,\xi)=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{\xi}\sin\left(4-2\sqrt{\xi}\right)\cos\left(2\sqrt{x}-2\right)}{\cos 2}, & 1\le x\le\xi\le 4,\\[2ex] -\dfrac{\sqrt{\xi}\cos\left(2\sqrt{\xi}-2\right)\sin\left(4-2\sqrt{x}\right)}{\cos 2}, & 1\le\xi\le x\le 4.\end{cases}$$

Найдем функцию $P(x,t)$

$$P(x,t)=2\int_1^4 G(x,\xi)\,d\xi=-\frac{2\sin\left(4-2\sqrt{x}\right)}{\cos 2}\int_1^x\sqrt{\xi}\cos\left(2\sqrt{\xi}-2\right)d\xi-$$

$$-\frac{2\cos\left(2\sqrt{x}-2\right)}{\cos 2}\int_x^4\sqrt{\xi}\sin\left(4-2\sqrt{\xi}\right)d\xi=2x-1+\frac{2\sin\left(4-2\sqrt{x}\right)-7\cos\left(2\sqrt{x}-2\right)}{\cos 2},$$

и ее значение при $x_0=2$:

$$P(x_0,t)=\frac{3\cos 2+2\sin\left(4-2\sqrt{2}\right)-7\cos\left(2\sqrt{2}-2\right)}{\cos 2}\approx 9{,}94\ne 0\,.$$

Таким образом $P(x_0,t)\ne 0$ при всех $t\in[0,T]$ и для обратной задачи (18)-(21) выполняются все условия теоремы и в заданном пространстве существует ее единственное решение.

Литература

1. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи: учеб. пособие / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сиб.науч. изд., 2009. - 457 с.
2. Robert A. Meyers. Mathematics of Complexity and Dynamical Systems / Robert A. Meyers, Springer-Verlag New York, 2011. – 1858 p.
3. Robert A. Van Gorder Third-order partial differential equations arising in the impulsive motion of a flat plate / Robert A. Van Gorder, Vajravelu K. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2009.Vol. 14, Issue 6. P. 2629–2636.
4. Баренблатт Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 5. С. 852-866.
5. Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка / Т.К.Юлдашев // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. 2014, выпуск 1(34). - с. 56-65. DOI: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1299
6. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations / V.Isakov. - Springer, New York, 2006, 284 pages;

7. Kozhanov A. I. Composite Type Equations and Inverse Problems / Kozhanov A. I.- VSP, Utrecht, Netherlands, 1999
8. Shitao Liu, An inverse problem for a third order PDE arising in high-intensity ultrasound: Global uniqueness and stability by one boundary measurement / Liu Shitao, Triggiani Roberto // Journal of Inverse and I11-Posed Problems. Volume 21, Issue 6, DOI: 10.1515/jip-2012-0096, 2013.- P 825-869.
9. Denisov A.M. Determining the Intensity Variation of Heat Sources in the Heat Equation/ A.M. Denisov, S.I. Solov’eva //Comput Math Model 33, 1–8 (2022). https://doi.org/10.1007/s10598-022-09551-4.
10. . – Volume 8, №3, 2012.- P. 321-328.
11. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения /Л. Коллатц. – М.: Наука, 1968. – 504 с.
12. Матанова К. Б., Ашырбекова А.Н. Үчүнчү тартиптеги өзгөрмөлүү коэффициенттүү жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн тескери маселе / К. Б. Матанова, А.Н. Ашырбекова // КМКТАУнун Жарчысы №4 (78), 2022. – Б.1603-1611.