ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ТЕХНИКА. 2023, №2

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.97
https://doi.org/10.52754/16948645_2023_2_97

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Мамадалиев Нуманжон А., д. ф.-м. н., профессор
e-mail: m_numana59@mail.ru
Бекниязов Асан Есбосинович, преподаватель
e-mail: bekniyazov.asan@mail.ru
Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *В настоящей работе основное внимание уделяется исследованию задачи преследования описываемой системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа при интегральных ограничениях на управления игроков. При исследовании этой задачи получено новое достаточное условие для завершения игры за определенное конечное время. Настоящая работа примыкает к публикациям [1]- [3].*

Ключевые слова: *Дифференциальная игра, игра преследования, интегральное ограничение, разрешающая функция, конфликтно-управляемый процесс, многозначное отображение, управление, преследователь, убегающий.*

Постановка задачи. А. Динамика конфликтно-управляемого процесса в конечномерном евклидовом пространстве R^n описывается системой линейных дифференциально – разностных уравнений нейтрального типа, содержащей неизвестную функцию и ее производные в различные моменты времени

$$\dot{z}(t)=\sum_{i=1}^{m}A_i\dot{z}(t-h_i)+\sum_{i=0}^{m}B_i z(t-h_i)-Cu(t)+Dv(t),\quad t\ge 0, \tag{1}$$

где $z(t)\in R^n, n\ge 1;\ A_i\ (i=1,2,...,m),\ B_i\ (i=0,1,2,...,m)-$ постоянные квадратные матрицы порядка $(n\times n)$, $(n\times n)$; $C, D-$ постоянные матрицы порядка $(n\times p)$ и $(n\times q)$, соответственно; $0=h_0<h_1<\ldots<h_m-$ действительные числа; $u-$ управляющий параметр преследования, $v-$ управляющий параметр убегания. Они $u(t)$, $v(t)$ выбираются в классе измеримых векторных функций удов-летворяющих интегральным ограничениям

$$\int_0^{+\infty}|u(t)|^2\,dt\le\rho^2,\quad \int_0^{+\infty}|v(t)|^2\,dt\le\sigma^2, \tag{2}$$

где ρ и σ - неотрицательные константы.

Измеримые функции $u=u(t)$, $v=v(t)$, $0\le t\le+\infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Кроме того, в пространстве R^n выделено непустое цилиндрическое терминальное множество $M = M_0 + M_1$, где $M_0 -$ линейное подпространство пространства R^n, $M_1 -$ компактное подмножество подпространства L, где $L -$ ортогональное дополнение к подпространству M_0 в R^n (т.е. $M_0 \oplus L = R^n$).

Начальным положением для преследования (1) является $n-$ мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[-h_m, 0]$. Отрезок $-h_m \le t \le 0$, на котором задано начальное положение (функция), назовем начальным множеством и обозначим через X, т.е.

$$X = \{\varphi(\cdot) : \varphi(t) - \text{абсолютно непрерывная функция},$$

$$\text{определенная на отрезке } [-h, 0],\ z(0) = \varphi(0) \in R^n \setminus M\}. \tag{3}$$

Определение 1. *Пусть* $K(t)$, $0 < t \le \tau, -$ *единственная матричная функция, обладающая следующими свойствами* [3]: *a)* $K(t) = \tilde{0}$, $t < 0$, $\tilde{0} -$ *нулевая матрица порядка* n; *b)* $K(0) = E_n$, где E_n – *единичная матрица порядка* n; *c) функция* $\sum_{i=0}^{m} C_i K(t - h_i)$ *непрерывна на* $[0, +\infty)$; *d) матричная функция* $K(t)$ *удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению*

$$\dot{K}(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i \dot{K}(t - h_i) + \sum_{i=0}^{m} B_i K(t - h_i). \tag{4}$$

при $t > -h,\ t \notin S^0 = S \bigcup (-h, +\infty)$, где $S = \left\{ t : t = \sum_{i=0}^{m} j_i h_i,\ j_i - \text{целые числа} \right\}$.

Существование и единственность матричной функции $K(t), -\infty < t \le \tau$, удовлетворяющей условиям a) - b), могут быть доказаны обычном методом последовательного интегрирования уравнения (4).

Матричная функция $K(t)$ принадлежит классу C_1 при $t > 0,\ t \notin S^0$, но в общем случае имеет разрывы первого рода в точках множества S^0.

Пусть допустимые управления $u = u(s)$, $v = v(s)$ выбраны на отрезке $[0, t]$, $t > 0$. Тогда для решения $z(t)$ уравнения (1) при начальном условии $\varphi(\cdot) \in X$, $(z(s) = \varphi(s),\ -h \le s \le 0)$, в силу формулы Коши имеет место следующее представление

$$z(t) = -\sum_{i=0}^{m} K(t - h_i) A_i \varphi(0) + \sum_{i=0}^{m} \int_{-h_i}^{0} K(t - s - h_i) \left[A_i \dot{\varphi}(s) + B_i \varphi(s) \right] ds -$$

$$- \int_{0}^{t} K(t - s) \left[Cu(s) - Dv(s) \right] ds, \tag{5}$$

где $A_0 = -E_n$, $E_n -$ единичная матрица порядка n.

Определение 2. *Будем говорить, что в игре (1),(2) можно завершить преследования из начального положения* $\varphi(\cdot) \in X$ *за время* $T(\varphi(\cdot)) > 0$, *если существует функция* $u = u(t)$, $0 \le t < \infty$, $v \in R^q$, $u(t, v) \in R^p$, *что для произвольной суммируемой с квадратом* *функции* $v(t),\ 0\le t<\infty,\ v(t)\in R^q,$ *удовлетворяющей неравенству* $\|v(\cdot)\|\le\sigma,$ *функция* $u(t)=u(t,v(t)),\ 0\le t<\infty,$ *является функцией суммируемым с квадратом, удовлетворяет неравенству* $\|u(\cdot)\|\le\rho,$ *и решение* $z(t),\ 0\le t<\infty,$ *уравнения (1) с учетом начального условия (3) до момента времени* $T(\varphi(\cdot))$ *попадает на терминальное множество* M : *т.е.* $z(t)\in M$ *при некотором* $t=t^*\in[0,T(\varphi(\cdot))].$

Число $T(\varphi(\cdot))>0,$ называется *гарантированным временем преследования* из точки $\varphi(\cdot)\in X,$ а функция $u(t,v), 0\le t<\infty,\ v\in R^q,\ u(t,v)\in R^p,$ - функцией преследования, такие называется стробоскопической стратегией.

Обозначим через $\pi-$ матрицу оператора ортогонального проектирования из R^n на $L,$ через $\underline{*}-$ обозначим геометрическую разность [1].

Пусть $\tau-$ произвольное число.

Теперь сформулируем достаточное условие для возможности завершения преследования в игре (1). Завершение преследования понимается в смысле определение 2.

Предположение 1. 1) *Для всех* $t\in[0,\tau]$ *имеет место включение*

$$\pi K(t)CR^p\supset\pi K(t)DR^q.$$

2) *Существуют число* $T>0$ *и матричная функция* $F(t):R^q\to R^p,\quad 0\le t\le\tau,$ *с суммируемыми с квадратом элементами такие, что:*

a) *при каждом* $t\in[0,\tau]$ *и* $w\in R^q$ *имеет место равенство*

$$\pi K(t)Dw=\pi K(t)CF(t)w; \tag{6}$$

b) *справедливо неравенство* $\rho>\chi$ *где*

$$\chi=\sup\left\{\|(Fv)(\cdot)\|:\|(Fv)(\cdot)\|=\sqrt{\int_0^\tau\|F(t)v(t)\|^2dt}:\|v(\cdot)\|\le\sigma\right\}. \tag{7}$$

Пусть п.2) предположения 1 выполнено. Введем в рассмотрение множество $G(\tau)$ состоящее из векторов вида $\int_0^\pi\pi K(t)Cw(t)dt,$ где $w(t),\quad 0\le t\le\tau,-$ произвольная суммируемыми с квадратом функция, удовлетворяющее условию

$$\|w(\cdot)\|^2=\int_0^\tau\|w(t)\|^2dt\le(\rho-\chi)^2, \tag{8}$$

при всех $t\in[0,T].$

Далее, введем следующее множество

$$W_1(\tau)=M_1+G(\tau). \tag{9}$$

Согласно первому прямому методу Л.С.Понтрягина для конфликтно – управляемого процесса (1), введем гарантированный момент времени поимки преследователем убегающего игрока [3]:

$$T(\varphi(\cdot))=\inf\{t\ge0:\Omega(t)\varphi(\cdot)\in W_1(\tau)\}, \tag{10}$$

где $\Omega(t)\varphi(\cdot) = -\sum_{i=0}^{m} \pi K(t-h_i) A_i\varphi(0) + \sum_{i=0}^{m} \int_{-h_i}^{0} \pi K(t-s-h_i)\left[A_i\dot{\varphi}(s) + B_i\varphi(s)\right] ds.$

Предположение 2. *Существует число существуют число* $\tau_1 \in (0,T],$ *что для начального положения* $\varphi(\cdot) \in M$ *имеет место включение*

$$\Omega(\tau_1)\varphi(\cdot) \in W_1(\tau_1). \tag{11}$$

Теорема. Если выполнены сформулированные выше предположения 1, 2, то в игре (1) при ограничениях (2) можно завершить преследования из начальной положении $\varphi(\cdot) \in X$ за некоторое конечное время $T(\varphi(\cdot)) = \tau_1.$

Доказательство. А. В соответствии с определением операции "+" и формулой (9), (11), существуют $m_1 \in M_1$ и $g \in G(\tau_1)$ такие, что

$$\Omega(\tau_1)\varphi(\cdot) = m_1 + g. \tag{12}$$

В соответствии с (8) существует суммируемая с квадратом функция $w(r),\ 0 \le r \le \tau_1,$ для которой

$$\int_0^{r_1} \pi K(t) C w(t)\,dt = g, \quad \|w(\cdot)\| \le \rho - \lambda. \tag{13}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$u(t,v) = \begin{cases} F(\tau_1 - t)v + w(\tau_1 - t), & 0 \le t \le \tau_1, \\ 0, & \tau_1 < t < \infty, \end{cases} \tag{14}$$

$0 \le t < \infty, \quad v \in R^q.$

Теперь покажем, что если $v(t),\ 0 \le t < \infty -$ произвольная суммируемая с квадратом функция, $v(t) \in R^q$ и удовлетворяет неравенству $\|v(\cdot)\| \le \sigma,$ то функция $u(t) = u(t, v(t)),\ 0 \le t < \infty,$ ((11), см. (14)), суммируема с квадратом, $u(t) \in R^p,$ $\|u(\cdot)\| \le \rho$ и решение $z(t), 0 \le t < \infty,$ уравнения (1) с учетом началь-ного условии (3), в момент времени $T(\varphi(\cdot)) = \tau_1$ попадет на терминальное множество M.

Действительно, то, что функция $u(t),\ 0 \le t < \infty,$ суммируема с квадратом и $u(t) \in R^p,$ следует из ее явного вида (14). Далее, так как

$$\|[Fv + w](\cdot)\| \le \|(Fv)(\cdot)\| + \|w(\cdot)\| \le \lambda + \rho - \lambda = \rho,$$

то $\|u(\cdot)\| \le \rho.$ Наконец, имеет место свойство (см.(6),(12)-(14))

$$\pi z(\tau_1) = -\sum_{i=0}^{m} \pi K(\tau_1 - h_i) A_i\varphi(0) + \sum_{i=0}^{m} \int_{-h_i}^{0} \pi K(\tau_1 - t - h_i)\left[A_i\dot{\varphi}(t) + B_i\varphi(t)\right] dt -$$

$$-\int_0^{\tau_1} \pi K(\tau_1 - t)\left[Cu(t) - Dv(t)\right] dt =$$

$$= \Omega(\tau_1)\varphi(\cdot) - \int_0^{\tau_1} \left\{\pi K(\tau_1 - t) C\left[F(\tau_1 - t)v(t) + w(\tau_1 - t)\right] - \pi K(\tau_1 - t) Dv(t)\right\} dt =$$

$$=\Omega(\tau_1)\varphi(\cdot)-\int_0^{\tau_1}\pi K(\tau_1-t)C\left[F(\tau_1-t)v(t)+w(\tau_1-t)\right]dt+\int_0^{\tau_1}\pi K(\tau_1-t)Dv(t)dt=$$

$$=\Omega(\tau_1)\varphi(\cdot)-\int_0^{\tau_1}\pi K(\tau_1-t)CF(\tau_1-t)v(t)dt-\int_0^{\tau_1}\pi K(\tau_1-t)Cw(\tau_1-t)+$$

$$+\int_0^{\tau_1}\pi K(\tau_1-t)Dv(t)dt=\Omega(\tau_1)\varphi(\cdot)-\int_0^{\tau_1}\pi K(\tau_1-t)Cw(\tau_1-t)dt=m_1=m_1.$$

Следовательно, в силу (15), это означает, что $z(\tau_1)\in M$. Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды, Наука, М., Т.2, 1988.

2. Беллман Р.,Кук К., Дифференциально-разностные уравнения, Наука, М.,1967.

3. Мамадалиев Н., Ибайдуллаев Т.Т. Модификация третьего метода преследования для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа// Изв.вузов. Матем., 2021. № 11, 21-33.