

УДК 519.7

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1\(8\)_11](https://doi.org/10.52754/16948645_2026_1(8)_11)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ ЦЕПЕЙ ПОСТАВОК

Сапарова Гульмира Баатыровна

к.ф.-м.н., доцент, Ошский технологический университет

saparovagula14@gmail.com

0009-0002-3524-8877

Мурзабаева Айтбу Бусурманкуловна

к.-ф.м.н, доцент, Ошский государственный университет

amurzabaeva@oshsu.kg

0000-0003-0694-6633

Аннотация. В данной статье рассмотрено применение интегральных уравнений для моделирования систем массового обслуживания и оптимизации цепей поставок. Рассмотрено и доказано, что использование интегральных моделей позволяет учитывать накопительный спрос, задержки поставок и распределение клиентов между службами обслуживания. Показаны аналитические и численные методы решения интегральных уравнений, рассмотрен пример оптимизации управления запасами и ресурсов. Полученные результаты исследования могут быть применены для повышения эффективности логистических процессов и снижения времени ожидания обслуживания.

Ключевые слова: интегральные уравнения, массовое обслуживание, цепи поставок, оптимизация, численные методы, уравнение Фредгольма, Вольтерра

INTEGRAL EQUATIONS IN THE THEORY OF MASS SERVICE AND SUPPLY CHAIN OPTIMIZATION

Saparova Gulmira Baatyrovna

candidat of physico-mathematical sciences, associate professor

Osh Technological University

saparovagula14@gmail.com

0009-0002-3524-8877

Murzabayeva Aitbu Busurmankulovna

candidat of physico-mathematical sciences, associate professor

Osh State University

amurzabaeva@oshsu.kg

0000-0003-0694-6633

Abstract. This article examines the application of integral equations to the modeling of queuing systems and the optimization of supply chains. It is demonstrated that the use of integral models makes it possible to account for cumulative demand, delivery delays, and the distribution of customers among service facilities. Analytical and numerical methods for solving integral equations are presented, and an example of inventory and resource management optimization is discussed. The results of this study can be applied to improve the efficiency of logistics processes and reduce customer waiting time.

Keywords: integral equations, queuing systems, supply chains, optimization, numerical methods, Fredholm equation, Volterra equation.

Введение. Современные системы логистики и обслуживания характеризуются высокой динамичностью и неопределенностью спроса. Эффективное управление запасами и потоками клиентов требует применения математических моделей, способных учитывать задержки, накопление и распределение ресурсов. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра представляют удобный инструмент для описания этих процессов. С их помощью можно учитывать прошлые события, такие как, предыдущие поставки или время ожидания клиентов и прогнозировать будущие состояния системы.

Так же социально – экономические системы характеризуются высокой степенью неопределенности, динамичности и сложности взаимодействующих процессов. В таких условиях особую актуальность приобретают методы математического моделирования, с помощью которых можно эффективно анализировать и оптимизировать процессы обслуживания и распределения ресурсов. К таким методам относятся интегральные уравнения, которые играют важную роль в описании систем с памятью, запаздыванием и распределенными параметрами.

Теория массового обслуживания является одним из важных направлений прикладной математики, она широко применяется при анализе работы транспортных систем, телекоммуникационных сетей, производственных процессов и логистических комплексов. В данной теории интегральные уравнения применяются для описания вероятностных характеристик потоков заявок, времени ожидания и длины очереди, особенно в случаях, когда классические марковские модели оказываются недостаточными. Вместе с этими задачами оптимизации цепей поставок развиваются в условиях глобализации и цифровизация экономики. Эффективное управление запасами, транспортными потоками и распределением ресурсов требует учета случайных факторов, временных задержек и взаимодействия между различными элементами системы. В таких случаях интегральные уравнения позволяют формализовать такие процессы, включая зависимости от предыстории системы, это делает их мощным инструментом для построения адекватных моделей цепей поставок.

Таким образом, применение интегральных уравнений в теории массового обслуживания и оптимизации цепей поставок открывает новые возможности для более точного описания и анализа сложных систем. И это способствует разработке эффективных методов управления, направленных на снижение издержек, повышение качества обслуживания и устойчивости логистических процессов.

Целью данной работы является показать, как интегральные уравнения применяются для моделирования систем массового обслуживания и оптимизации цепей поставок, а также исследовать численные методы решения этих уравнений. В многоканальных системах обслуживания интегральные уравнения помогают учитывать распределение клиентов между каналами и вероятность ожидания. В логистике эти уравнения моделируют накопительный спрос, задержки поставок, и влияние прошлых событий на текущий запас.

Интегральные уравнения Фредгольма первого рода имеют вид:

$$\int_a^b K(t, s) u(s) ds = f(t),$$

Вольтерра второго рода:

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s) u(s) ds.$$

где $u(s)$ – искомая функция, $K(t, s)$ – ядро интеграла, $f(t)$ – известная функция.

Интегральные уравнения применяются в системах обслуживания, как:

- **Вероятность ожидания клиентов:** вычисляется через ядро интеграла, учитывающее поток клиентов и количество обслуживающих каналов;
- **Моделирование перегрузки каналов:** интегральное уравнение позволяет определить момент, когда система станет перегруженной.
- **Оптимизация ресурсов:** численное решение интегральных уравнений показывает оптимальное распределение сотрудников и оборудования.

Обзор литературы. Современные исследования показывают активное развитие методов анализа систем массового обслуживания и цепей поставок на основе стохастических моделей и интегральных уравнений. Были рассмотрены фундаментальные аспекты теории очередей, включая анализ времени ожидания и балансировки потоков [1,2]

Особое внимание уделяется интеграции моделей очередей с задачами управления запасами и логистики. Так, в исследованиях развиваются queueing - inventory модели, позволяющие учитывать одновременно процессы обслуживания и хранения ресурсов [3, 4]

В разных статьях были предложены подходы, основанные на интегральных уравнениях, для описания динамики стохастических систем обслуживания. Эти методы позволяют более точно моделировать непрерывные потоки заявок и ресурсов. Современные работы по оптимизации цепей поставок демонстрируют применение методов теории массового обслуживания для повышения эффективности логистических систем в условиях неопределенности [2, 3]

Таким образом, можно отметить тенденцию к объединению интегральных методов, теории очередей и оптимизационных моделей в рамках единого подхода к анализу сложных социально-экономических систем.

Материалы и методы. Пусть система состоит из склада и нескольких пунктов выдачи, а спрос в каждый момент времени t задается функцией $f(t)$. Определить оптимальный уровень запасов $u(t)$, учитывая задержки поставок и распределение ресурсов.

Математическую модель можно записать с помощью интегрального уравнения Вольтерра:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t K(t, s) f(s) ds - \int_0^t R(t, s) u(s) ds.$$

где, $K(t, s)$ – накопление спроса, а $R(t, s)$ – расход ресурсов.

Решение идет численное. Применяется метод дискретизации на временном шаге Δt . Для каждого шага t_i :

$$u(t_i) \approx u_0 + \sum_{j=0}^i K(t_i, t_j) f(t_j) \Delta t - \sum_{j=0}^i R(t_i, t_j) u(t_j) \Delta t.$$

Реализация возможна в *Excel*, *Python* или *Matlab*.

Например, в оптимизации это:

- сравнение двух стратегий поставок: периодические поставки и поставка по фактическому спросу;
- вычисление среднего времени ожидания и уровня запасов;
- выбор стратегии с минимальными затратами и наименьшим риском дефицита.

Пример 1. Модель очереди с интегральным уравнением.

Рассмотрим сервисный центр по заказу еды, в который поступают заявки:

- поток заявок – интенсивность $\lambda = 2$ заявки/ час;

- обслуживание – интенсивность $\mu = 3$ заявки/ час.

Пусть $P(t)$ – вероятность того, что система свободна в момент времени t . Динамика системы описывается интегральным уравнением типа Вольтерра:

$$P(t) = e^{-\mu t} + \lambda \int_0^t e^{-\mu(t-s)} P(s) ds.$$

Решение: Это уравнение решается методом дифференцирования.

Продифференцируем:

$$P'(t) = -\mu e^{-\mu t} + \lambda P(t).$$

Подставляем $\lambda = 2, \mu = 3$:

$$P'(t) = -3e^{-3t} + 2P(t).$$

Решая как дифференциальное уравнение, имеем:

Общее решение:

$$P(t) = Ce^{2t} + e^{-3t}.$$

Из условия $P(0) = 1$:

$$C + 1 = 1 \Rightarrow C = 0.$$

Таким образом,

$$P(t) = e^{-3t}.$$

- вероятность свободной системы экспоненциально убывает;
- чем больше μ , тем быстрее система освобождается;
- при $t \rightarrow \infty$: $P(t) \rightarrow 0$.

То есть, система со временем почти всегда занята.

Пример 2. Модель очереди + запасы.

Рассмотрим сервисный центр по заказу такси, в который поступают заявки:

- заявки приходят с интенсивностью λ ;
- обслуживание с интенсивностью μ ;
- есть гаражи (запасы) $S(t)$;
- при отсутствии запаса возникает очередь.

Построим модель в виде интегральной системы:

$$P(t) = e^{-\mu t} + \lambda \int_0^t e^{-\mu(t-s)} P(s) ds.$$

$$S(t) = S_0 + \lambda \int_0^t (a - bP(s)) ds.$$

где: a – скорость пополнения; b – интенсивность потребления.

$P(t)$ – загрузка системы; $S(t)$ – уровень запасов; если $S(t) \rightarrow 0 \rightarrow$ возникает очередь. Рассмотрим конкретные значения:

$$a = 5, b = 4, P(t) = e^{-3t}.$$

Тогда,

$$S(t) = S_0 + \lambda \int_0^t (5 - 4e^{-3s}) ds.$$

Решаем:

$$S(t) = S_0 + 5t + \frac{4}{3}e^{-3t} - \frac{4}{3}.$$

Таким образом, получаем окончательно:

$$S(t) = S_0 + 5t - \frac{4}{3}(1 - e^{-3t});$$

Полученная модель показывает процесс обслуживания и динамику запасов. Анализ показывает, что при увеличении интенсивности потребления система может перейти в режим дефицита, что приводит к росту очередей.

Выводы

Таким образом, получаем:

1. Интегральные уравнения являются мощным инструментом для моделирования систем массового обслуживания и цепей поставок.
2. Они позволяют учитывать накопительный спрос, задержки и распределение ресурсов.
3. Численные методы решения дают возможность реализовать модели в Excel и Python, что делает их применимыми для практических задач.
4. Оптимизация на основе интегральных моделей снижает время ожидания и повышает эффективность логистики.

Список литературы

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методологии. – 8 – е изд., стер. – Москва: КНОРУС, 2019. – 192 с.
2. Крейн С.Г. Интегральные уравнения: введение в теорию. – Москва: ЛЕНАНД, 2017. – 320 с.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / пер. с англ. – Москва: Машиностроение, 1979. – 432 с.
4. Таха Х.А. Введение в исследование операций. – 10 – е изд. – Москва: Вильямс, 2019. – 912 с.